4°
h.P.
53

4° Math. P. 353 vi

Sturm

22 X

Bayerische Staatsbibliothek

<36645706630013

Lehrbuch der Analysis

(Cours d'Analyse)

von

Ch. Sturm.

Übersetzt von

Dr. Theodor Gross.
Privatdozent a. d. Königl. techn. Hochschule zu Charlottenburg.

Erster Band.

Berlin W.
Fischers technologischer Verlag.
M. Krayn.
(1897)

493 7

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Lehrbuch der Analysis

(Cours d'Analyse)

von

Ch. Sturm.

Übersetzt von

Dr. Theodor Gross.

Privatdozent a. d. Königl. techn. Hochschule zu Charlottenburg.

Erster Band.

Berlin W.

Fischers technologischer Verlag.

M. Krayn.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort des Übersetzers.

Der Cours d'Analyse von Sturm nimmt durch die Reichhaltigkeit und methodische Anordnung seines Inhaltes und die Klarheit der Darstellung unter den Lehrbüchern der Analysis eine ganz besondere Stelle ein. Die hier dem deutschen Publikum zum ersten Mal gebotene Übersetzung desselben entspricht daher einem wirklichen Bedürfnisse. Sie ist nach der achten Auflage des Originals veranstaltet. Die neueste Auflage des letzteren enthält einige von dem Herausgeber zugesetzte Lektionen, die jedoch dem Lernenden, für den das Werk zunächst bestimmt ist, entbehrlich sein dürften; aber in der Hauptsache, den nach Sturms Vorlesungen redigierten Lektionen, ist sie ein im wesentlichen unveränderter Abdruck des übersetzten Textes. Der Inhalt dieser Lektionen ist sinngetreu und unverkürzt wiedergegeben; dagegen schienen in den Nebenteilen des Originals einige Kürzungen zweckmässig.

Erstens wurde das ausführliche Verzeichnis der wichtigsten Definitionen, Lehrsätze u. s. w. weggelassen. Dasselbe umfasst einige Bogen und mag mit Rücksicht auf die Vorbereitung für ein französisches Examen zusammengestellt sein; ist jedoch zu einer gründlichen Wiederholung nicht ausreichend und erfüllt andererseits seiner grossen Länge wegen nicht den Zweck einer Übersicht, wozu das kurze vor den Lektionen gegebene Inhaltsverzeichnis weit geeigneter ist.

Zweitens wurden die Nachrichten über Sturms Leben gekürzt.

Drittens wurde das Verzeichnis von Sturms Abhandlungen weggelassen. Sie sind in französischen Zeitschriften erschienen; ihre Titel hätten daher auch französisch angeführt werden müssen, was für die dieser Sprache nicht genügend kundigen Leser, an die sich eine Übersetzung wendet, ohne Nutzen gewesen wäre.

Notiz über Sturms Leben und Schriften.

Charles Sturm wurde am 22. September 1803 zu Genf geboren. Er besuchte zuerst das Collége und die Akademie seiner Vaterstadt, war dann einige Zeit hindurch Hauslehrer, wozu ihn die nach dem Tode seines Vaters dürftigen Verhältnisse seiner Familie nötigten, und studierte später in Paris. Hier erhielt er schon im Jahre 1827 zusammen mit seinem Freunde Colladon den grossen mathematischen Preis der Akademie für eine Abhandlung über die Kompression der Flüssigkeiten.

Durch Fourier zum Studium der Algebra angeregt, veröffentlichte er (1829) den nach ihm benannten Satz über die Anzahl der reellen Wurzeln einer Gleichung, die zwischen zwei gegebenen Zahlen liegen, wodurch er in die erste Reihe der Mathematiker trat.

Nachdem ihm die Julirevolution den Eintritt in das staatliche Unterrichtswesen eröffnet hatte, von dem er vorher als Protestant ausgeschlossen war, erhielt er durch Vermittelung von Arago eine Anstellung als Lehrer der Mathematik am Collége Rollin.

Im Jahre 1836 wurde er an Stelle von Ampère Mitglied der Akademie der Wissenschaften, deren grossen mathematischen Preis er einige Jahre vorher für eine Abhandlung über die Theorie der Gleichungen davon getragen hatte, worin er die Eigenschaften der Funktionen, die einer Differentialgleichung Genüge leisten, untersuchte.

Zu dieser Zeit fanden seine wissenschaftlichen Leistungen bereits im Auslande wie im Inlande grosse Anerkennung: mehrere Akademien wählten ihn zu ihrem Mitgliede, und er erhielt (1840) eine Professur an der Ecole Polytechnique und auch an der Sorbonne.

Sturm erfüllte, unterstützt von einem kräftigen Körper, seine vielfachen Obliegenheiten mit grossem Eifer und Erfolg, und Vorzügliches liess sich noch von dem im besten Alter stehenden Forscher erwarten. Doch im Jahre 1851 erlitt seine Gesundheit infolge zu grosser wissenschaftlicher Anstrengungen eine heftige Erschütterung, von der er sich nicht mehr vollständig erholte, und im Alter von einundfünfzig Jahren, am 18. Dezember 1855, erlag er seinem Leiden, von seiner Familie und zahlreichen Freunden betrauert.

Sein Freund Lionville hielt ihm an seinem Grabe einen begeisterten Nachruf.

Als Lehrer trat Sturm sehr bescheiden, selbst schüchtern auf, verstand es jedoch durch die Klarheit und den Gedankenreichtum seines Vortrages seine Zuhörer in hohem Masse zu fesseln. Manchen von ihm gefundenen geistvollen Beweis eigneten sich seine Schüler an und veröffentlichten ihn, ohne den wahren Urheber zu nennen, was er sich freigiebig gefallen liess.

Ausser seinen weitverbreiteten Cours d'Analyse und Cours de Mécanique hat er eine grosse Anzahl Abhandlungen aus den Gebieten der Geometrie, Algebra, Theorie der Differentialgleichungen mathematischen, Physik und Mechanik veröffentlicht.

Inhalt des ersten Bandes.

Seite

Vorwort des Übersetzers . III
Notiz über Sturms Leben und Schriften IV

Differentialrechnung.

Erste Lektion. **Einleitende Angaben.**

Funktionen von einer und von mehreren Veränderlichen. — Methode der Grenzbestimmung. — Infinitesimalmethode. — Verschiedene Ordnungen des unendlich Kleinen . 1

Zweite Lektion. **Lehrsätze über die Ableitungen und Differentiale.**

Ursprung und Zweck der Differentialrechnung. — Abgeleitete Funktion. — Eigenschaften der abgeleiteten Funktionen. — Differential. — Ableitungen der Funktionen von Funktionen 10

Dritte Lektion. **Differentiations-Regeln.**

Differential einer Summe, — eines Produktes, — eines Quotienten von Funktionen. — Differential einer Potenz, — eines imaginären Ausdruckes. — Regel für die zusammengesetzten Funktionen 22

Vierte Lektion. **Reihen.**

Definitionen. — Lehrsätze über die Konvergenz der Reihen. — Beispiele. — Grenzwert von $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ 34

Fünfte Lektion. **Differentiation der transcendenten Funktionen.**

Differentiation der logarithmischen Funktionen, — der Exponentialfunktionen, — der goniometrischen und der cyklometrischen Funktionen 45

Sechste Lektion. **Differentiation der unentwickelten (impliciten) Funktionen — Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.**

Unentwickelte Funktionen, die durch eine einzige Gleichung gegeben sind. — Elimination einer Konstanten zwischen der gegebenen Gleichung und der durch Differentiation erhaltenen. — Unentwickelte Funktionen, die durch eine beliebige Anzahl von Gleichungen gegeben sind. — Successive Ableitungen und Differentiale. — Vertauschung der unabhäng. Veränderlichen 55

Siebente Lektion. **Differentiation der Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.**

Partielle und totale Differentiale. — Eigenschaften des totalen Differentials. — Differential zusammengesetzter Funktionen, — unentwickelter Funktionen. — Ableitungen und Differentiale von verschiedener Ordnung. — Lehrsatz über die Reihenfolge der Differentiationen. — Totale Differentiale verschiedener Ordnung von entwickelten und unentwickelten Funktionen 69

Seite

Achte Lektion. **Analytische Anwendungen der Differentialrechnung. Reihenentwickelung für Funktionen einer Veränderlichen.**

Beweis des Taylorschen Satzes. — Bemerkung über dessen Gebrauch. — Andere Formen des Restes. — Die Maclaurinsche Reihe. — Bemerkungen über dieselbe. — Zweiter Beweis des Taylorschen Satzes 81

Neunte Lektion. **Anwendungen der Maclaurinschen Reihe.**

Entwickelung der Exponentialfunktionen. — Entwickelung von sin x und cos x. — Binomischer Satz für beliebige Exponenten. — Entwickelung von log $(1+x)$. — Formeln zur Berechnung der Logarithmen. — Die Logarithmen als Grenzwerte algebraischer Funktionen betrachtet 92

Zehnte Lektion. **Die Moivresche Formel und Folgerungen aus ihr.**

Allgemeine Bemerkungen über die imaginären Ausdrücke. — Moivresche Formel. Entwickelung des Sinus und Cosinus eines Vielfachen eines Bogens nach Potenzen des Sinus und Cosinus dieses Bogens. — Entwickelung einer Potenz eines Sinus oder Cosinus, nach den Sinus oder Cosinus der Vielfachen des Bogens. — Theorie der imaginären Exponenten. — Imaginäre Logarithmen . 103

Elfte Lektion. **Auflösung der binomischen Gleichungen.**

Auflösung der Gleichung $x^m = a$. — Satz von Cotes. — Auflösung der Gleichung $x^m = -a$, und der Gleichung $x^m = a + b\sqrt{-1}$ 112

Zwölfte Lektion. **Vieldeutige Ausdrücke.**

Wahrer Wert der Ausdrücke, die in einer der Formen $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, 0^0, 1^\infty$ dargestellt sind. — Erweiterung der vorhergehenden Regeln. — Anwendungen 118

Dreizehnte Lektion. **Entwickelung der Funktionen mehrerer Veränderlicher.**

Ausdehnung des Taylorschen Satzes auf Funktionen mehrerer Veränderlicher. — Ausdehnung des Maclaurinschen Satzes. — Eigenschaften der homogenen Funktionen . 126

Vierzehnte Lektion. **Maxima und Minima der Funktionen einer Veränderlichen.**

Maxima und Minima der Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen. — Anwendungen. — Maxima und Minima unentwickelter Funktionen . . . 134

Fünfzehnte Lektion. **Maxima und Minima der Funktionen mehrerer Veränderlicher.**

Maxima und Minima entwickelter und unentwickelter Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen 144

Geometrische Anwendungen der Differentialrechnung.

Sechzehnte Lektion. **Theorie der Tangenten.**

Gleichungen der Tangente und der Normale. — Länge der Subtangente, Subnormale u. s. w. — Grad der Gleichung der Tangente. — Aufgaben über die Tangenten. — Sinn der Konkavität und Konvexität der Kurven . . . 152

Siebzehnte Lektion. **Sätze über die Flächen und Bogen ebener Kurven.**

Differential der Fläche einer ebenen Kurve. — Flächen als Grenzwerte einer Summe von Parallelogrammen aufgefasst. — Anwendungen. — Rektifikation eines ebenen Kurvenbogen. — Differential eines Kurvenbogen. — Grenzwert des Verhältnisses zwischen Bogen und Sehne. — Neue Sätze über Kurvenbogen als Grenzwerte betrachtet 160

Seite

Achtzehnte Lektion. **Beziehung der ebenen Kurven auf Polarkoordinaten.**
Bestimmung der Tangente. — Längen der Subtangente und Subnormale. — Differential einer Sektorfläche. — Differential eines Kurvenbogens. — Anwendungen. — Bipolare Koordinaten 168

Neunzehnte Lektion. **Theorie der Berührung der ebenen Kurven.**
Berührungen verschiedener Ordnung zwischen ebenen Kurven. — Die Ordnung der Berührung ist unabhängig von der Wahl der Axen. — Verschiedener Charakter der Berührungen von gerader und von ungerader Ordnung. — Die oskulierenden Kurven. — Der oskulierende Kreis. — Anwendung auf die Kegelschnitte . 178

Zwanzigste Lektion. **Evoluten und einhüllende Kurven ebener Kurven.**
Evoluten und Evolventen ebener Kurven. — Allgemeine Eigenschaften der Evoluten. — Anwendung auf die Parabel, Ellipse und Hyperbel. — Einhüllende Kurve einer beweglichen Kurve 188

Einundzwanzigste Lektion. **Spezielle Untersuchung der Cykloide.**
Definition und Gleichung der Kurve. — Tangente und Normale. — Radius des Krümmungskreises — Evolute. — Länge eines Cykloidenbogens . . . 199

Zweiundzwanzigste Lektion. **Krümmung ebener Kurven.**
Ausdruck des Krümmungsradius, wenn die unabhängige Veränderliche beliebig gewählt wird. — Anwendung auf Polarkoordinaten. — Theorie der Krümmung ebener Kurven. — Identität des Krümmungskreises und des oskulierenden Kreises. — Anwendungen . 206

Dreiundzwanzigste Lektion. **Die Kurven doppelter Krümmung.**
Gleichung der Tangente. — Winkel zwischen der Tangente und den Koordinatenaxen. — Normalebene. — Differential eines Kurvenbogens. — Grenze des Verhältnisses zwischen Bogen und Sehne 216

Vierundzwanzigste Lektion. **Krumme Flächen und Linien doppelter Krümmung.**
Gleichung der Tangentenebene. — Gleichungen der Normale. — Grad der Gleichung der Tangentenebene. — Aufgaben über Tangentenebenen. — Oskulierende Ebene. — Winkel zwischen der oskulierenden Ebene und den Koordinatenebenen. — Hauptnormale 223

Fünfundzwanzigste Lektion. **Krümmung der Linien im Raume. — Schraubenlinie.**
Krümmung der Linien im Raume. — Krümmungskreis. — Radius der Torsion oder zweiten Krümmung. — Gleichung der Schraubenlinie. — Tangente. — Radius und Mittelpunkt der Krümmung. — Ort der Krümmungsmittelpunkte. — Oskulierende Ebene und Torsionswinkel 234

Sechsundzwanzigste Lektion. **Singuläre Punkte der ebenen Kurven.**
Wendepunkte. — Vielfache Punkte. — Rückkehrpunkte. — Isolierte Punkte. — Endpunkte. — Eckpunkte 244

Integralrechnung.

Siebenundzwanzigste Lektion. **Regeln für die Integration der Funktionen.**
Definitionen und Bezeichnungen. — Integration einer mit einer Konstanten multiplizierten Funktion. — Unmittelbare Integration einiger einfachen

Seite

Differenziale. — Integration einer Summe. — Partielle Integration. — Integration durch Substitution . 255

Achtundzwanzigste Lektion. **Integration rationaler Funktionen.**
Ungleiche Wurzeln. — Ungleiche imaginäre Wurzeln. — Gleiche Wurzeln. — Gleiche imaginäre Wurzeln . 263

Neunundzwanzigste Lektion. **Integration irrationaler Funktionen.**
Funktionen, die nur eingliedrige irrationale Ausdrücke enthalten. — Funktionen, die eine Quadratwurzel enthalten. — Integration binomischer Differenziale. — Integrable Fälle. — Reduktionsformeln 275

Dreissigste Lektion. **Integration transcendenter Funktionen.**
Funktionen, die sich auf algebraische Funktionen zurückführen lassen. — Integral von $z^n P dx$. — Integration einiger Exponential- und trigonometrischen Funktionen. — Integration der Produkte von Sinus und Cosinus. — Integration von $\sin^m x \cos^n x dx$ 289

Einunddreissigste Lektion. **Bestimmte Integrale.**
Definitionen und Bezeichnungen. — Geometrische Bedeutung. — Beispiele bestimmter Integrale. — Integrale als Grenzwerte von Summen betrachtet. — Einzelne Bemerkungen. — Annähernde Berechnung bestimmter Integrale. — Neuer Beweis des Taylorschen Satzes 301

Zweiunddreissigste Lektion. **Fortsetzung der bestimmten Integrale. — Integration durch Reihen.**
Integrale, deren Grenzen unendlich werden. — Integrale, worin die unter dem $\int$ stehende Funktion innerhalb der Integrationsgrenzen oder an ihnen unendlich wird. — Bestimmte Integrale ohne bestimmten Wert. — Integration durch Reihen. — Beispiele . 308

Geometrische Anwendungen der Integralrechnung.

Dreiunddreissigste Lektion. **Quadratur ebener Flächen.**
Allgemeine Formeln. — Quadraturen in Parallelkoordinaten. — Quadraturen in Polarkoordinaten . 319

Vierunddreissigste Lektion. **Rektifikation ebener Kurven.**
Allgemeine Formel. — Beispiele: Parabel. — Ellipse. — Hyperbel. — Cykloide 331

Fünfunddreissigste Lektion. **Kubatur der Körper.**
Rotationskörper. — Beispiele: die durch Rotation einer Ellipse, oder Cykloide entstandenen Körper. — Durch eine einzige Integration berechenbare Volumina. — Durch beliebige Flächen begrenzte Volumina 339

Sechsunddreissigste Lektion. **Mehrfache Integrale. — Inhalt krummer Flächen.**
Doppelintegrale. — Dreifache Integrale. — Reihenfolge der Integrationen. — Quadratur krummer Flächen. Inhalt der Rotationsflächen. — Anwendung auf die Kugel und das Ellipsoid 348

Erste Lektion.

Einleitende Angaben.

Funktionen von einer und von mehreren Veränderlichen. — Methode der Grenzbestimmung. — Infinitesimalmethode. — Verschiedene Ordnungen des unendlich Kleinen.

Funktionen von einer und von mehreren Veränderlichen.

1. Bevor wir Zweck und Prinzipien der Differentialrechnung darlegen, sind einige einleitende Angaben notwendig.

Veränderlich nennt man eine Grösse, die nacheinander verschiedene Werte annimmt, *konstant* eine Grösse, die im Verlaufe ein und derselben Rechnung einen festen Wert beibehält. Aus der Natur der zu lösenden Aufgabe ergiebt sich, welche Grössen veränderlich, und welche konstant sind.

2. Wenn die auf einander folgenden Werte einer veränderlichen Grösse nach einem bestimmten Gesetze von den Werten abhängen, die eine andere Veränderliche annimmt, wird die erstere eine *Funktion* der letzteren genannt. Ändern sich zwei Grössen gleichzeitig, so kann man behaupten, dass die eine eine Funktion der anderen ist, wenn man weiss, dass jedem Werte der einen ein bestimmter Wert der anderen entspricht; selbst wenn die Beziehung, die zwischen beiden Grössen besteht, nicht bekannt und nicht einmal analytisch darzustellen sein sollte.

3. *Unabhängig* nennt man die Veränderliche, der man willkürliche Werte beilegt; *Funktion* die Veränderliche, die von diesen abhängige Werte annimmt. So ist z. B. die Fläche eines Kreises oder einer Kugel eine Funktion des Radius; die Schwingungszeit eines Pendels eine Funktion von dessen Länge.

Eine Grösse kann eine Funktion von mehreren unabhängigen Veränderlichen sein; so ist z. B. das Volumen eines Cylinders mit kreisförmiger Grundfläche eine Funktion seiner Höhe und des Radius seiner Grundfläche.

Die veränderlichen Grössen werden gewöhnlich durch die letzten Buchstaben x, y, z u. s. w. des Alphabetes, die konstanten durch die ersten a, b, c u. s. w., dargestellt.

Will man verschiedene Funktionen einer Veränderlichen x bezeichnen, ohne deren Natur näher zu bestimmen, so wendet man die Symbole $f(x)$, $\varphi(x)$, $F(x)$... an. Giebt man x einen besonderen Wert a, so wird der Wert, den $f(x)$ durch die Substitution von a an Stelle von x annimmt, durch $f(a)$ bezeichnet.

Die Funktionen von mehreren Veränderlichen bezeichnet man durch $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$, $F(x, y, z)$, ... Durch $f(a, b, c)$, $\varphi(a, b, c)$, $F(a, b, c)$... bezeichnet man die Werte, die erhalten werden, wenn in diesen Funktionen a, b, c an die Stelle von x, y, z treten.

4. Eine Funktion einer einzigen Veränderlichen kann geometrisch dargestellt werden. Es genügt dazu, die unabhängige Veränderliche x als Abscisse und die Funktion φ als dazu gehörende Ordinate einer ebenen Kurve zu betrachten, die durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

definiert ist.

Gewöhnlich ist diese Kurve stetig, d. h. für unendlich wenig von einander verschiedene Werte von x ändert sich auch die Ordinate nur unendlich wenig; y ist dann eine *stetige Funktion von x.*

Desgleichen kann man durch eine Fläche eine Funktion von zwei unabhängig Veränderlichen darstellen; aber eine Funktion von drei, von vier oder von einer noch grösseren Zahl unabhängiger Veränderlicher ist nicht geometrisch darstellbar.

5. Eine Funktion ist entwickelt (explicit), wenn sie unmittelbar durch die Veränderliche oder die Veränderlichen von denen sie abhängt, ausgedrückt ist, so dass man ihren Wert erhalten kann, indem man in Bezug auf diese Veränderlichen bestimmt angegebene Rechenoperationen ausführt. So sind

$$y = x + \sqrt{x^2 - a^2},\ y = a^x$$

entwickelte Funktionen von x.

Unentwickelt (implicit) ist eine Funktion, die mit der Veränderlichen, von der sie abhängt, durch eine unaufgelöste Gleichung oder durch irgend welche nichtanalytisch ausgedrückte Bedingungen verbunden ist, wie y in der Gleichung

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - a^2 = 0.$$

Die Funktion wird explicit, wenn man ihren Wert aus dieser Gleichung bestimmt; man erhält

$$y = x \pm \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Methode der Grenzbestimmung.

6. Wenn die aufeinander folgenden Werte einer veränderlichen Grösse sich unbeschränkt einem bestimmten Werte nähern, so dass sie sich *beliebig wenig von ihm unterscheiden*, so wird dieser der Grenzwert der Veränderlichen genannt. Wir wollen einige Beispiele geben.

Die Kreisfläche ist die Grenze, der sich die Flächen der regelmässigen eingeschriebenen Vielecke immer mehr nähern, je grösser ihre Seitenzahl wird. In der That kann, wie in der Geometrie bewiesen wird, die Fläche eines regelmässigen in einen Kreis eingeschriebenen Vielecks von der Kreisfläche beliebig wenig verschieden sein, wenn seine Seitenzahl hinlänglich gross ist. Wie wohl zu beachten, ist es hierfür nicht nötig zu beweisen, dass die Fläche des eingeschriebenen regelmässigen Vielecks mit seiner Seitenzahl beständig zunimmt.

Betrachtet man ferner einen Bogen und dessen Sinus, so kann das Verhältnis $\frac{\sin x}{x}$, das immer kleiner als die Einheit ist, von dieser beliebig wenig verschieden werden, wenn man dem Bogen hinlänglich kleine Werte beilegt. Also die Einheit ist die Grenze von $\frac{\sin x}{x}$, wenn x unbegrenzt abnimmt. Offenbar ist es dabei nicht nötig zu beweisen und wird gewöhnlich auch nicht bewiesen, dass das Verhältnis $\frac{\sin x}{x}$ beständig zunimmt, wenn x kleiner als ein Quadrant ist und unbegrenzt abnimmt.

7. Die Funktionen, welche für einen gewissen Wert der Veränderlichen die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, haben oft Grenzwerte. Davon haben wir ein Beispiel in dem Verhältnis $\frac{\sin x}{x}$, das für $x = 0$ $\frac{0}{0}$ wird und die Einheit zur Grenze hat. Ebenso nimmt der Ausdruck

$$y = 2a - \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}$$

für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ an. Legt man jedoch x Werte bei, die von a verschieden sind, sich diesem jedoch beständig nähern, so sind die Werte von y bestimmt und gleich den Werten des Ausdruckes

$$2a - \frac{x^2 + ax + a^2}{x + a},$$

Nähert sich nun x immer mehr a, so unterscheidet sich dieser Ausdruck immer weniger von

$$2a - \frac{3a}{2} \text{ oder } \frac{a}{2}.$$

Der Grenzwert von y ist also $\frac{a}{2}$.

8. Eine veränderliche Grösse kann sich einer Grenze unbeschränkt nähern, indem sie immer kleiner oder immer grösser als diese Grenze bleibt; es kann aber auch geschehen, dass eine veränderliche Grösse abwechselnd grösser und kleiner als ihre Grenze wird, indem sie sozusagen nach beiden Seiten oscilliert. So hat das Verhältnis $\frac{\sin x}{x}$ die Null zur Grenze, wenn x unendlich gross wird. Ferner wird $\frac{\sin x}{x}$ immer, wenn x gleich einem Vielfachen von 180^0 wird, Null und ändert sein Vorzeichen.

9. *Wenn zwei Grössen, die sich gleichzeitig ändern in allen Werten, die sie durchlaufen, beständig unter sich gleich bleiben, und wenn man weiss, dass die eine sich einer Grenze nähert, so ist klar, dass auch die andere, sich derselben Grenze oder einer Grenze, die der ersteren gleich ist, nähert.* Das ist das Prinzip der Methode der Grenzbestimmung, von dem in allen Teilen der Mathematik ein so häufiger Gebrauch gemacht wird.

Man will z. B. beweisen, dass der Kreis zum Mass das Produkt aus seinem Umfange in seinen halben Radius hat. Bezeichnen a, p, r bezw. die Fläche, den Umfang und den kleinen Radius eines in den Kreis eingeschriebenen regelmässigen Vielecks, so hat man

$$a = p \times \tfrac{1}{2} r.$$

Nun sind a und $p \times \frac{1}{2} r$ Grössen, die sich mit der Seitenzahl ändern, die aber immer einander gleich bleiben; ihre Grenzen sind also gleich. Bezeichnen A, C, R bezw. die Fläche, den Umfang und den Radius des Kreises, so ist A die Grenze von a, C die von p und R die von r; also ist

$$A = C \times \tfrac{1}{2} R.$$

Infinitesimalmethode.

10. Nimmt eine veränderliche Grösse immer kleinere Werte an, so dass sie kleiner werden kann als jede gegebene Grösse, so sagt man, sie wird *unendlich klein.* So kann die Differenz zwischen der Fläche eines Kreises und der des eingeschriebenen

Vielecks durch Vermehrung der Seitenzahl unendlich klein gemacht werden. Der Bruch $\frac{x}{x^2 - 2x + 3}$ wird unendlich klein, wenn x immer grössere Werte annimmt.

Ein unendlich Kleines ist also keine bestimmte Grösse, die einen wirklich angebbaren Wert hat, sondern es ist im Gegenteil eine wesentlich veränderliche Grösse, die Null zur Grenze hat.

11. Wenn eine Veränderliche immer grössere Werte annimmt, so dass sie jede gegebene Grösse übersteigen kann, so sagt man, sie wird *unendlich* oder *unendlich gross* und stellt sie alsdann durch das Zelchen ∞ oder $\frac{K}{0}$ dar. So wird die Funktion

$$y = a + \frac{a^2}{x - a}$$

unendlich für $x = a$.

Für Werte von x, die sehr wenig von a verschieden, aber grösser als a sind, sind die zugehörigen Werte von y positiv, während für Werte von x, die kleiner als a sind, die Werte von y negativ werden. Das Unendliche kann also positiv oder negativ sein.

12. Die unendlich kleinen Grössen sind Hilfsgrössen, welche dazu dienen, die Rechnung mit endlichen Grössen zu erleichtern. Ihre Anwendung führt auf die folgenden beiden häufig zu lösenden Probleme: *1. Zwei unendlich kleine Grössen hängen voneinander ab, und es soll die Grenze ihres Verhältnisses bestimmt werden. 2. Man soll die Grenze einer Summe unendlich kleiner Grössen bestimmen, deren Anzahl beliebig zunimmt.*

Die Auflösung dieser Probleme wird in vielen Fällen durch die folgenden beiden Sätze vereinfacht.

13. Satz I. *Die Grenze des Verhältnisses zweier unendlich kleiner Grössen ändert sich nicht, wenn man diese Grössen durch andere ersetzt, die von ihnen verschieden sind, aber mit ihnen in Verhältnissen stehen, die die Einheit zur Grenze haben.*

Es seien α und β zwei unendlich kleine Grössen; α' und β' zwei andere Grössen der Art, dass die Grenzen der Verhältnisse $\frac{\alpha}{\alpha'}$, $\frac{\beta}{\beta'}$, der Einheit gleich sind. Nun ist identisch

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\beta},$$

und folglich

$$\lim \frac{\alpha}{\beta} = \lim \frac{\alpha}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\beta} = \lim \frac{\alpha'}{\beta}.$$

Ebenso ist

$$\frac{\alpha'}{\beta} = \frac{\beta'}{\beta} \cdot \frac{\alpha'}{\beta'},$$

und folglich

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta} = \lim \frac{\beta'}{\beta} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha'}{\beta'}.$$

14. Den Beweis dieses Satzes kann man auch in folgender Weise darstellen.

Setzt man

$$\alpha' = \alpha + \delta$$

und berücksichtigt, dass $\lim \frac{\alpha'}{\alpha} = 1$ ist, so erhält man

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \frac{\delta}{\alpha},$$

und $\frac{\delta}{\alpha}$ muss die Null zur Grenze haben, was man so ausdrückt, dass man sagt, δ ist unendlich klein im Verhältnis zu α.

Ebenso erhält man

$$\frac{\beta'}{\beta} = 1 + \frac{\delta'}{\beta},$$

und folglich ist

$$\frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1 + \frac{\delta}{\alpha}}{1 + \frac{\delta'}{\beta}}.$$

Also wird, da $\frac{\delta}{\alpha}$ und $\frac{\delta'}{\beta}$ die Null zur Grenze haben,

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta}{\alpha} = 1,$$

woraus

$$\lim \frac{\alpha'}{\beta'} = \lim \frac{\alpha}{\beta}$$

folgt.

Dieser Beweis führt zu dem folgenden neuem Ausdrucke des obigen Satzes:

Die Grenze des Verhältnisses zweier unendlich kleiner Grössen bleibt ungeändert, wenn man dieselben durch andere Grössen ersetzt, die sich von den ersteren nur durch eine gegen sie unendlich kleine Grösse unterscheiden.

Beispiele. Für x = o wird

1. $\lim \frac{x}{\text{tang } x} = \lim \frac{\sin x}{\text{tang } x} = \lim \cos x = 1,$

2. $\lim \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3},$

3. $\lim \frac{\sin x}{\sin^2 3x} = \lim \frac{x}{9x^2} = \infty.$

15. Satz II. *Der Grenzwert einer Summe unendlich kleiner Grössen bleibt ungeändert, wenn sie durch andere Grössen ersetzt werden, deren Verhältnisse zu den ersteren einzeln die Einheit zur Grenze haben, oder die sich von den ersteren Grössen nur durch Grössen unterscheiden, die im Verhältnis zu ihnen unendlich klein sind.*

Seien $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$ unendlich kleine Grössen, die nach einem bestimmten Gesetze aufeinander folgen, und deren Anzahl immer grösser wird. Bezeichne S deren Summe und es werde angenommen, diese habe einen endlichen Grenzwert. Ferner seien $\beta, \beta', \beta'' \ldots, \varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \ldots$ unendlich kleine Grössen der Art, dass man hat

$$\beta = \alpha + \alpha\,\varepsilon,\ \beta' = \alpha' + \alpha'\,\varepsilon',\ \beta'' = \alpha'' + \alpha''\,\varepsilon'', \ldots;$$

dann wird

$$\beta + \beta' + \beta'' + \ldots = S + \alpha\,\varepsilon + \alpha'\,\varepsilon' + \alpha''\,\varepsilon'' + \ldots$$

Ist nun η die grösste der Quantitäten $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'' \ldots$, so wird dem absoluten Betrage nach

$$\alpha\,\varepsilon + \alpha'\,\varepsilon' + \alpha''\,\varepsilon'' < S\,\eta,$$

und da der Grenzwert von η Null ist, so ergiebt sich

$$\lim\,(\alpha\,\varepsilon + \alpha'\,\varepsilon' + \alpha''\,\varepsilon'' + \ldots) = 0,$$

und folglich

$$\lim\,(\beta + \beta' + \beta'' + \ldots) = S,$$

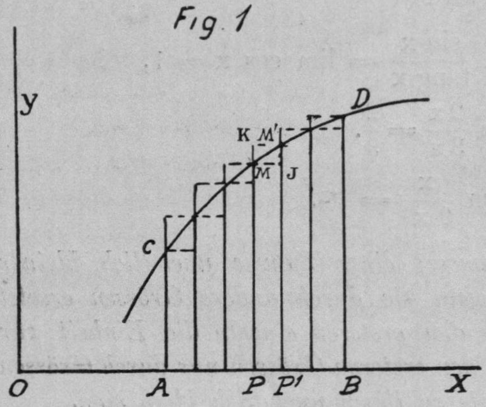
was zu beweisen war.

16. Die Gleichung

$$\lim\,(\alpha\,\varepsilon + \alpha'\,\varepsilon' + \alpha''\,\varepsilon'' + \ldots) = 0$$

führt zu folgendem Satze: *Wenn eine Summe unendlich kleiner Grössen, deren Anzahl beständig zunimmt, eine endliche Grenze hat, so hat die Summe der Produkte, die erhalten werden, indem man jede dieser unendlichen kleinen Grössen mit einer anderen unendlich kleinen Grösse multipliziert, die Null zur Grenze.*

Wir betrachten z. B. (Fig. auf d. folg. S.) die Fläche, die von der ebenen Kurve CD, der x-Axe und den beiden Coordinaten CA und DB begrenzt wird, und nehmen an, x werde nach irgend einem Gesetze in immer kleiner werdende Teile wie z. B. PP′ geteilt, doch so, dass



der Grenzwert jedes Teiles Null ist. Dann behaupte ich, dass die Summe der Rechtecke wie MJM'K, die mit dem Intervall PP' und der Differenz zweier unmittelbar aufeinander folgenden Coordinaten konstruiert sind, die Null zur Grenze hat.

Man hat

$$\sum PP' = AB,$$

und

$$\sum MJM'K = \Sigma\, PP' \,.\, KM,$$

und da KM eine unendlich kleine Grösse ist, folgt durch Anwendung des vorstehenden Satzes

$$\sum MJM'K = 0.$$

Verschiedene Ordnungen des unendlich Kleinen.

17. Wenn man die voneinander abhängenden unendlich kleinen Grössen betrachtet, wählt man eine unter ihnen als das massgebende unendlich Kleine aus, womit man die anderen vergleicht. Man nennt alsdann *unendlich kleine Grössen der ersten Ordnung* alle diejenigen, deren Verhältnisse zu dem massgebenden unendlich Kleinen endliche Grenzwerte haben; *unendlich kleine Grössen der zweiten Ordnung* diejenigen, deren Verhältnisse zu den unendlich kleinen Grössen der ersten Ordnung unendlich kleine Grössen der ersten Ordnung sind, u. s. f.

Ist α eine unendlich kleine Grösse der ersten Ordnung, so hat hiernach jede andere unendlich kleine Grösse derselben Ordnung die Form $\alpha\,(p + \beta)$, worin p endlich und β unendlich klein ist. Allgemein wird $\alpha^n\,(p + \beta)$ ein unendlich Kleines der n^{ten} Ordnung darstellen.

Beispiele. Ist arc x von der ersten Ordnung unendlich klein, so ist auch sin x von der ersten Ordnung unendlich klein, weil $\frac{\sin x}{x}$ den Grenzwert 1 hat. Dagegen ist $1 - \cos x$ von der zweiten Ordnung unendlich klein; weil $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$ ist.

Die Sätze I und II (Num. **13** und **15**) können nun auch in folgender Weise ausgesprochen werden.

Um den Grenzwert zu bestimmen, den der Quotient zweier Quantitäten annimmt, die aus unendlich kleinen Grössen verschiedener Ordnung zusammengesetzt sind, braucht man in jeder der beiden Quantitäten nur die unendlich kleinen Grössen der niedrigsten Ordnung beizubehalten.

*Um den Grenzwert einer Summe aus mehreren unendlich kleinen Grössen zu bestimmen, braucht man nur die unendlich kleinen Grössen der niedrigsten Ordnung beizubehalten.**)

Als Anwendung des ersten Satzes haben wir

$$\lim \frac{\sin x + 3 \sin^2 x}{x + 2 x^3} = \lim \frac{\sin x}{x} = 1.$$

In diesem Beispiele vernachlässigt man im Zähler das von der zweiten Ordnung unendlich Kleine $3 \sin^2 x$ und im Nenner das von der dritten Ordnung unendlich Kleine $2 x^3$.

Übungen.

1. Wenn der Abstand zweier auf einer Kurve liegenden Punkte ein unendlich Kleines der ersten Ordnung ist, so ist der Abstand des einen dieser Punkte von der Tangente, die in dem anderen an die Kurve gelegt ist, ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung.

2. Wenn zwei Kurven eine gemeinsame Tangente haben, so ist die Differenz ihrer Ordinaten, die in einem von der ersten Ordnung unendlichen kleinen Abstande vom Berührungspunkte liegen, ein unendlich Kleines von der zweiten Ordnung.

3. Analoge Sätze gelten für die Flächen.

*) „Der grosse Vorteil, den diese Sätze gewähren, besteht darin, dass sie häufig gestatten in den unendlich kleinen Quantitäten denjenigen Teil zu vernachlässigen, der ihre Vergleichung und die Rechnung schwierig macht. Es genügt immer, dass dieser Teil im Verhältnis zu der Quantität selbst unendlich klein ist, und in den Resultaten, worin man nur die Grenzwerte der Verhältnisse oder der Summen dieser unendlich kleinen Quantitäten berücksichtigt, entsteht dadurch kein Irrtum." Duhamel, Éléments de Calcul infinitésimal.

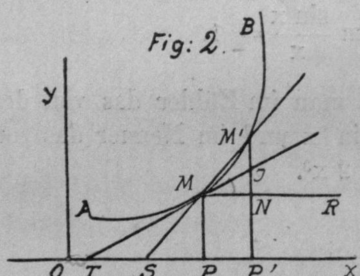
Zweite Lektion.

Lehrsätze über die Ableitungen und Differentiale.

Ursprung und Zweck der Differentialrechnung. — Abgeleitete Funktion. — Eigenschaften der abgeleiteten Funktionen. — Differential. — Ableitungen der Funktionen von Funktionen.

Ursprung der Differentialrechnung.

18. Auf die Entdeckung der Differentialrechnung wurde man geführt, indem man eine allgemeine Methode suchte, Tangenten an ebene durch Gleichungen dargestellte Kurven zu ziehen.



Es seien zwei Veränderliche x und y gegeben, die unter sich durch irgend eine Beziehung verbunden sind, so dass die eine eine Funktion der anderen ist, $y = f(x)$. Wir betrachten dieselben als die ebenen rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes und konstruieren die Kurve AMB, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, und die in einem gewissen Intervall reell und stetig sei. An dieselbe soll im Punkte M, dessen Coordinaten x und y sind, eine Tangente gezogen werden. Die Tangente definiert man gewöhnlich als die Grenze, in die eine Secante übergeht, wenn sie sich um einen ihrer Schnittpunkte dreht, so dass ihr zweiter Schnittpunkt dem ersteren unendlich nahe kommt. Sei also M' ein zweiter Punkt der Kurve, der die Coordinaten $x + h, y + k$ habe, so ist die Tangente MT die Grenze der Secante M'MS.

Nun ist im Dreieck M'MN

$$\operatorname{tang} M'MN = \frac{M'N}{MN} = \frac{k}{h},$$

und demnach

$$\operatorname{tang} JMR = \lim \operatorname{tang} M'MN = \lim \frac{k}{h},$$

wenn h in Null übergeht.

Sucht man also für unendlich klein werdende h den Grenzwert des Quotienten aus den beiden gleichzeitigen Änderungen h und k von x und y, die unter sich durch die Gleichung

$$y + k = f(x + h)$$

verbunden sind, so ist derselbe die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen die die Kurve im Punkte M berührende Gerade mit der x-Axe einschliesst.

Zweck der Differentialrechnung. — Abgeleitete Funktion.

19. *Zweck der Differentialrechnung ist für jede Funktion den Grenzwert zu bestimmen, in den der Quotient aus dem Zuwachs der Funktion durch den der Veränderlichen übergeht, wenn letzterer Null wird.* Dieser Grenzwert, der von dem der Veränderlichen x beigelegten Werte aber keineswegs von dessen Zunahme h abhängt, wird die Ableitung der gegebenen Funktion oder die abgeleitete Funktion genannt, und man stellt ihn durch y′ oder durch f′(x) dar.

Wir wollen nun die Ableitungen einiger einfacher Funktionen bestimmen.

1. $$y = x^m,$$

wenn m eine ganze positive Zahl ist.

Ändern wir x in x + h, so nimmt y den Wert y + k an, und man hat $y + k = (x + h)^m$ oder $k = (x + h)^m - x^m$.

Hieraus folgt

$$k = m x^{m-1} h + \frac{m.(m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \ldots + h^m,$$

und

$$\frac{k}{h} = m x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} h + \ldots . + h^{m-1}.$$

Der Quotient $\frac{k}{h}$ setzt sich aus zwei Teilen zusammen; der eine ist unabhängig von h, in dem anderen ist der Faktor h allen Gliedern gemeinsam. Nimmt h bis zur Null ab, so kann dieser zweite Teil beliebig klein werden; also ist

$$\lim \frac{k}{h} = m x^{m-1}.$$

Im vorliegenden Falle ist also

$$y' = m x^{m-1}.$$

Diese Ableitung kann man auch ohne Anwendung des binomischen Satzes erhalten. Setzen wir

$$x + h = X,$$

so wird

$$k = X^m - x^m,$$

und wenn man berücksichtigt, dass h = X — x ist, folgt hieraus

$$\frac{k}{h} = \frac{X^m - x^m}{X - x} = X^{m-1} + X^{m-2} x + \ldots + X x^{m-2} + x^{m-1}.$$

Nimmt h bis zu Null ab, so fallen X und x zusammen, und da die rechte Seite der Gleichung m Glieder hat, die beim Übergang zur Grenze gleich x^{m-1} werden, so folgt wiederum $\lim \frac{k}{h} = m x^{m-1}$

2. Es sei

$$y = a x^m + b x^n + c x^p + \dots$$

eine ganze Funktion. Ändern wir x in x + h, so wird aus y y + k, und man hat

$$y + k = a (x + h)^m + b (x + h)^n + c (x + h)^p + \dots,$$

und demnach

$$k = a [(x + h)^m - x^m] + b [(x + h)^n - x^n] + c [(x + h)^p - x^p] + \dots.$$

Folglich ist

$$k = a \left[m x^{m-1} h + \frac{m (m-1)}{1.2} x^{m-2} h^2 + \dots \right]$$

$$+ b \left[n x^{n-1} h + \frac{n.(n-1)}{1.2} x^{n-2} h^2 + \dots \right]$$

$$+ \dots\dots\dots$$

Wird durch h dividiert und dann h = o gesetzt, so erhält man

$$\lim \frac{k}{h} = y' = m a x^{m-1} + n b x^{n-1} + p c x^{p-1} + \dots$$

Auch diese Ableitung könnte wie die vorhergehende ohne Hilfe des binomischen Satzes erhalten werden.

3. $$y = \frac{1}{x^m} = x^{-m},$$

wenn m eine ganze positive Zahl ist.

Man hat

$$y + k = \frac{1}{(x + h)^m},$$

und

$$k = \frac{1}{(x + h)^m} - \frac{1}{x^m} = \frac{x^m - (x + h)^m}{x^m (x + h)^m}.$$

Durch Entwickelung und Division mit h wird

$$\frac{k}{h} = \frac{- m x^{m-1} - \frac{m (m-1)}{1.2} x^{m-2} h - \dots}{x^m (x + h)^m},$$

und durch Übergang zur Grenze erhält man schliesslich

$$\lim \frac{k}{h} = - \frac{m x^{m-1}}{x^{2m}} = - \frac{m}{x^{m+1}}.$$

Also ist

$$y' = - \frac{m}{x^{m+1}} = - m x^{-m-1}.$$

Wie hieraus ersichtlich, bleibt die Regel nach der die Ableitung von x^m erhalten wird, für ganze m immer dieselbe, gleichgültig, welches Vorzeichen m hat.

4. $$y = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Man hat

$$k = \sqrt{(x+h)^2 - a^2} - \sqrt{x^2 - a^2},$$

und demnach

$$\frac{k}{h} = \frac{\sqrt{(x+h)^2 - a^2} - \sqrt{x^2 - a^2}}{h};$$

setzt man nun $h = 0$, so nimmt dieser Ausdruck die Form $\frac{0}{0}$ an.

Um diese Unbestimmtheit zu beseitigen, wenden wir ein bekanntes Verfahren an, wir multiplizieren nämlich Zähler und Nenner des Bruches mit der Summe der Wurzeln, deren Differenz der Zähler ist, und erhalten

$$\frac{k}{h} = \frac{\left[\sqrt{(x+h)^2 - a^2} - \sqrt{x^2 - a^2}\right]\left[\sqrt{(x+h)^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - a^2}\right]}{h\left[\sqrt{(x+h)^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - a^2}\right]}$$

$$= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h\left[\sqrt{(x+h)^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - a^2}\right]},$$

oder

$$\frac{k}{h} = \frac{2x + h}{\sqrt{(x+h)^2 - a^2} + \sqrt{x^2 - a^2}},$$

und schliesslich

$$\lim \frac{k}{h} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Also ist

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Zu den Ableitungen der vorstehenden Funktionen sind wir auf kurzen Wegen ohne Schwierigkeit gelangt, aber diese würden bei weniger einfachen Funktionen nicht zum Ziele führen. Die Differentialrechnung wird uns einfachere Methoden liefern.

Differential.

20. Es sei

$$y = f(x),$$

und x erleide irgend eine positive oder negative Änderung h. Ist dann k die zugehörige Änderung von y, so hat man

$$y + k = f(x + h).$$

Da y' der Grenzwert von $\frac{k}{h}$ ist, so muss, wenn h nicht Null ist

$$\frac{k}{h} = y' + \alpha$$

sein, worin die Grösse α eine Funktion von x und h ist, die gleichzeitig mit h Null werden muss. Hieraus folgt

$$k = y' h + \alpha h.$$

Die Änderung k der Funktion setzt sich also aus zwei verschiedenen Teilen zusammen; der erste ist das Produkt aus der Änderung der unabhängigen Veränderlichen x in die Ableitung der Funktion. Man nennt ihn das Differential der Veränderlichen y und bezeichnet ihn durch d y, so dass

$$d y = y' h = f' (x) h$$

ist.

Der zweite Teil ist das Produkt aus h in eine Grösse α, die mit h Null wird. Diesen vernachlässigen wir.

Das Differential der unabhängigen Veränderlichen ist nichts anderes als ihre Änderung h. Denn betrachten wir die Funktion

$$y = x,$$

so ist

$$y + k = x + h,$$

und folglich

$$k = h$$

und schliesslich

$$\frac{k}{h} = 1.$$

Für diese einfachste Funktion von x ist also die Ableitung gleich 1, und folglich das Differential

$$d y \text{ oder } d x = 1 \times h = h.$$

Die Formel

$$d y = y' h$$

kann demnach auch geschrieben werden

$$d y = y' d x,$$

woraus sich

$$y' = \frac{d y}{d x}$$

ergiebt.

Die Ableitung einer Funktion einer Veränderlichen ist also der Quotient aus dem Differential der Funktion durch das Differential der Veränderlichen.

Man nennt daher die Ableitung auch den *Differentialquotienten.*

Der Differentialquotient wird auch als das schliessliche Verhältnis zwischen den gleichzeitigen Änderungen der Veränderlichen aufgefasst. Da aber diese Änderungen die Null zur Grenze haben, kann man eigentlich nicht sagen, dass sie dann ein Verhältnis haben,

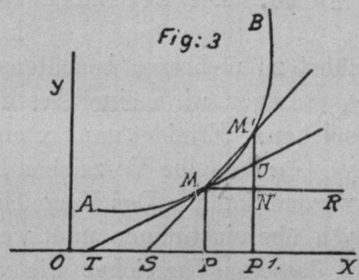
und was man so nennt, ist nichts anderes als der Grenzwert dem das Verhältnis dieser Grössen sich unbeschränkt nähert.

21. Das Differential ist geometrisch darstellbar. Denn ist AMB die durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

dargestellte Kurve, so hat man

$$\text{tang JMN} = \lim \frac{k}{h} = y'.$$



Nun ist

$$JN = MN \,.\, \text{tang JMN},$$

und folglich

$$JN = h \,.\, y' = dy.$$

JN stellt also das Differential von y dar, vorausgesetzt, dass

$$MN = h = dx$$

ist.

Wie hieraus ersichtlich, sind dx und dy die zusammengehörenden Änderungen von x und y, wenn man von dem auf der Kurve liegenden Berührungspunkte M zu irgend einem Punkte J der Tangente übergeht, während k oder M'N die Änderung der Ordinate der Kurve ist, die zu derselben Abscissenänderung $h = dx$ gehört.

22. Obgleich JN und M'N im allgemeinen verschieden sind, hat ihr Verhältnis doch die Einheit zur Grenze. Denn aus $\frac{k}{h} = y' + \alpha$ ergiebt sich

$$k = (y' + \alpha)\, h.$$

Ferner ist

$$dy = y'h;$$

und demnach

$$\frac{k}{dy} = \frac{y' + \alpha}{y'} = 1 + \frac{\alpha}{y'},$$

und, wenn y' nicht Null ist,

$$\lim \frac{k}{dy} = 1.$$

Der Quotient aus der Änderung einer Funktion dividiert durch ihr Differential hat also die Einheit zum Grenzwerte, vorausgesetzt, dass die Ableitung von Null verschieden ist.

Das Differential wird daher als eine unendlich kleine Anderung der Funktion bezeichnet, aber diese Bezeichnung ist nicht streng; denn

da α nicht Null ist (ausser für $y = ax + b$), so ist k genau genommen nicht gleich dy.*)

Allgemeine Eigenschaften der abgeleiteten Funktionen.

23. Die Beziehung (No. 22)

$$k = (y' + \alpha)\, h$$

führt zu mehreren beachtenswerten Folgerungen.

Legen wir x einen bestimmten Wert bei, so erhält auch y' einen solchen. Erleidet dann x eine hinlänglich kleine Änderung, so wird $y' + \alpha$ dasselbe Vorzeichen haben wie y'; da α beliebig klein gemacht werden kann. Das Vorzeichen von k wird also mit demjenigen von $y'h$ übereinstimmen und, wenn wir h als positiv voraussetzen, wird k dasselbe Vorzeichen wie y' haben. Ist demnach y' positiv, so ist auch k positiv, d. h. die Funktion nimmt zu, und ist y' negativ, so nimmt die Funktion ab. *Eine Funktion nimmt also von einem bestimmten Wert an zu oder ab, je nachdem ihre Ableitung für diesen Wert positiv oder negativ ist.*

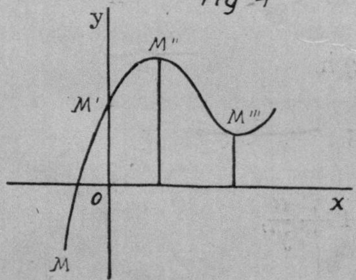
Hieraus ergiebt sich, dass, wenn die Ableitung einer Funktion beständig positiv bleibt, während x von dem Werte a in den Wert b übergeht, die Funktion in diesem Intervall beständig zunehmen muss, und das Gegenteil findet statt, wenn die Ableitung negativ ist.

Als Beispiel wählen wir die Funktion

$$y = \tfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

und konstruieren die durch diese Gleichung dargestellte Kurve.

Fig 4



Für $x = 0$ ist $y = 1$,
$x = 1$, $y = 2\tfrac{1}{3}$,
$x = 2$, $y = 1\tfrac{2}{3}$,
$x = 3$, $y = 1$,
$x = -1$, $y = -4\tfrac{1}{3}$.

Konstruieren wir diese Punkte, so sehen wir, dass die Kurve etwa die Form MM′M″M‴ hat.

Will man aber wissen, für welche Werte von x die Ordinate zu- oder abnimmt, so bestimme man die Ableitung von y.

Es ist $y' = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

Man sieht nun, dass, wenn x von 0 bis 1 zunimmt, die Ableitung y' positiv ist; die Ordinate wächst also vom Punkte M′ bis

*) Man kann sagen, die Differenz zwischen dem Differential einer Funktion und der Änderung derselben ist ein unendlich kleines von wenigstens zweiter Ordnung, während die Änderung der Veränderlichen unendlich klein von der ersten Ordnung ist.

zum Punkte M″. Für den Punkt M″, dessen Abscisse $x = 1$ ist, hat man $y' = 0$, d. h. die Tangente ist in diesem Punkte der x-Axe parallel. Lässt man dann x von 1 bis 3 wachsen, so wird die Ableitung y′ negativ; die Ordinate nimmt also vom Punkte M″ bis zum Punkte M‴ ab, und da für $x = 3$ $y = 0$ wird, ist die Tangente in letzterem Punkte wiederum der x-Axe parallel.

Wird ferner x grösser als 3, so ist die Ableitung beständig positiv, die Ordinate der Kurve wächst also vom Punkte M‴ an beständig. Für negative x ist y′ positiv; für negative wachsende x nehmen demnach die Ordinaten ebenfalls zu. Wie, hierbei zu beachten, nimmt eine negative Quantität zu, wenn ihr absoluter Betrag abnimmt.

24. Aus der Formel

$$k = (y' + \alpha)\, h$$

folgt, dass, *wenn die Ableitung einer Funktion für alle Werte von x, die zwischen a und b liegen, Null ist, die Funktion in diesem Intervall einen konstanten Wert hat.*

Wir nehmen $a < b$ an. Da nach der Voraussetzung $\lim \frac{k}{h} = 0$ ist, so ist, wenn h hinlänglich klein wird, für jeden beliebigen zwischen a und b liegenden Wert von x dem absoluten Betrage nach $\frac{k}{h} < \varepsilon$, wobei ε eine bestimmte beliebig klein zu wählende Grösse ist. Hieraus folgt $k < \varepsilon h$.

Betrachten wir nun zwei beliebige zwischen a und b liegende Werte von x, x_1 und x_2, so müssen die entsprechenden Werte y_1 und y_2 gleich sein. Zum Beweise legen wir x eine Reihe von Werten bei, die zwischen x_1 und x_2 liegen und gleichmässig oder ungleichmässig wachsen mögen, die aber hinlänglich klein sind, so dass für jeden einzelnen derselben $k < \varepsilon h$ ist, wenn für k dessen absoluter Betrag genommen wird. Wir erhalten so eine Reihe von Ungleichungen von derselben Form; addieren wir sie, so folgt, dass die Summe aller successiven, positiv genommenen Änderungen der Funktion y kleiner ist als die Summe der Produkte $\varepsilon . h$, oder kleiner als das Produkt aus der Grösse ε in die Summe der Änderungen der Veränderlichen x, d. i. in $x_2 - x_1$. Also ist a fortiori die Summe der successiven, mit ihren Vorzeichen genommenen Änderungen der Funktion, d. i. $y_2 - y_1$, kleiner als $\varepsilon (x_2 - x_1)$, oder

$$y_2 - y_1 < \varepsilon (x_2 - x_1),$$

und da ε beliebig klein gemacht werden kann, folgt, dass die Differenz $y_2 - y_1$ kleiner als jede gegebene Grösse, d. h. Null ist.

Wir haben demnach

$$y_2 - y_1 = 0, \text{ oder } y_2 = y_1.$$

Die Funktion y behält also für alle in dem betrachteten Intervall liegenden Werte von x denselben Wert, was zu beweisen war.

25. Aus der Vergleichung der beiden vorstehenden Sätze folgt noch, *dass, wenn eine Funktion in einem gewissen Intervalle zunimmt, ihre Ableitung in demselben nicht negativ werden kann;* aber sie kann ein oder mehrere Male durch die Null hindurchgehen. Ebenso folgt, *dass, wenn eine Funktion abnimmt, ihre Ableitung negativ wird,* aber sie kann auch für einen oder mehrere besondere Werte Null werden.

26. Wenn die Ableitung einer Funktion beständig unendlich wäre, würde x eine Konstante sein; denn ist

$$\lim \frac{k}{h} = \infty, \text{ so wird } \lim \frac{h}{k} = 0,$$

und durch gleiche Schlüsse wie oben (24) würde hieraus folgen, dass zwei beliebige Werte von x unter sich gleich sind.*)

27. Bisher haben wir die gleichzeitigen Änderungen der Veränderlichen x und y durch die Buchstaben h und k bezeichnet; da wir aber bald eine grössere Anzahl Veränderlicher zu betrachten haben werden, ist es nun notwendig, eine Bezeichnungsweise anzuwenden, die sofort erkennen lässt, auf welche Veränderliche sich jede Änderung bezieht. Zu diesem Zwecke bedient man sich des Zeichens Δ. Wenn wir also mehrere Veränderliche x, y, z, u betrachten, die unter einander durch Gleichungen verbunden sind, so dass eine einzige unabhängig ist, so bezeichnen wir die gleichzeitigen Änderungen dieser Veränderlichen durch Δx, Δy, Δz, Δu. Wählen wir x als unabhängig Veränderliche, so haben die Quotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta z}{\Delta x}, \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

bezw. die Grenzwerte

$$\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{du}{dx},$$

wenn Δx unbeschränkt abnimmt.

28. *Sind zwei Funktionen für alle Werte der unabhängigen Veränderlichen einander gleich, so sind auch ihre Differentiale und ihre Ableitungen einander gleich.*

Es seien u und v zwei gleiche Funktionen von x; lassen wir

*) Da die Ableitung einer stetigen Funktion nur für besondere Werte der Veränderlichen Null oder unendlich werden kann, so folgt, dass im allgemeinen eine unendlich kleine Zunahme einer Funktion eine Grösse von derselben Ordnung ist wie die Zunahme der Veränderlichen.

nun x um Δx zunehmen, und sind Δu und Δv die entsprechenden Anderungen von u und v, so wird

$$u + \Delta u = v + \Delta v,$$

und, da $u = v$, so ist

$$\Delta u = \Delta v,$$

woraus

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

folgt.

Da diese Gleichung für beliebig kleine Werte von x gilt, so gilt sie auch noch an der Grenze. Die Grenze von $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ ist aber die Ableitung von u oder $\frac{du}{dx}$, und ebenso ist $\frac{dv}{dx}$ die Grenze von $\frac{\Delta v}{\Delta x}$; also ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx} \text{ oder } du = dv.$$

Dieselbe Schlussfolgerung bleibt bestehen, wenn die **Funktionen** eine konstante Differenz haben. Denn ist

$$u = v + c,$$

nud wir ändern x in $x + \Delta x$, so ist

$$u + \Delta u = v + \Delta v + c;$$

und, da $u = v + c$, so ist auch

$$\Delta u = \Delta v, \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

und folglich

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx},$$

oder

$$du = dv,$$

d. h., *haben zwei Funktionen eine konstante Differenz, so haben sie auch dasselbe Differential.*

29. Umgekehrt, *sind, die Differentiale zweier Funktionen in einem gewissen Intervalle einander gleich, so haben die Funktionen in diesem Intervalle eine konstante Differenz.*

Denn ist y gleich der Differenz $u - v$, und ferner

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dx},$$

so folgt aus der Gleichung $y = u - v$

$$y + \Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v,$$

oder

$$\Delta y = \Delta u - \Delta v,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

und durch Übergang zur Grenze

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = 0.$$

Also ist $\frac{dy}{dx}$ Null und demnach y eine Konstante, was zu beweisen war.

Funktionen von Funktionen.

30. Ist

$$u = \varphi(y),$$

worin y selbst eine Funktion f (x) von x ist, so nennt man u eine *Funktion einer Funktion* von x.

Um die Ableitung von u nach x zu erhalten, könnte man in $\varphi(y)$ y durch f (x) ersetzen, wodurch man erhielte

$$u = \varphi[f(x)];$$

aber diese Substitution kann vermieden werden. Denn wir haben die identische Gleichung

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

worin Δx die Zunahme der unabhängigen Veränderlichen, Δy und Δu die entsprechenden Änderungen von y und u sind. Nimmt Δx unbegrenzt ab, so wird diese Gleichung, da sie immer gilt, auch noch an der Grenze bestehen. Nun ist aber lim $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ die Ableitung von u in Bezug auf x oder $\frac{du}{dx}$, und lim $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Ferner ist der Grenzwert von $\frac{\Delta u}{\Delta y}$ nichts anderes als $\varphi'(y)$, d. i. die Ableitung von $\varphi(y)$, wenn y als unabhängige Veränderliche betrachtet wird; denn diese Grenze hängt nicht von der Beziehung ab, die zwischen y und x besteht, und um sie zu erhalten, genügt es, dass Δy bis zur Null abnimmt.

Folglich ist

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(y)\, f'(x). \tag{1}$$

Also *die Ableitung der Funktion einer Funktion ist gleich dem Produkt der Ableitungen dieser Funktionen.*

31. Ersetzt man in der Gleichung (1) $f'(x)$ durch $\frac{dy}{dx}$, so wird

$$\frac{du}{dx} = \varphi'(y)\frac{dy}{dx},$$

und demnach

$$du = \varphi'(y)\,dy \qquad (2)$$

Das Differential der Funktion $\varphi(y)$, worin $y = f(x)$ ist, hat also dieselbe Form wie wenn y unabhängige Veränderliche wäre; bei der Anwendung ist aber dy durch seinen Wert $f'(x)\,dx$ zu ersetzen.

32. Die Gleichung (1) kann auch noch auf eine andere Form gebracht werden.

Da

$$\varphi'(y) = \frac{du}{dy},\ f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

so ist

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}. \qquad (3)$$

Diese Gleichung darf man nicht für eine Identität halten; denn dy hat in $\frac{du}{dy}$ nicht dieselbe Bedeutung wie in $\frac{dy}{dx}$: in dem ersten Ausdrucke bezeichnet nämlich dy die unendlich kleine Änderung von y, wenn dieses als unabhängig veränderlich angenommen wird, während in dem zweiten dy das Differential von y, als Funktion von x betrachtet, ist.

Als Beispiel diene

$$u = y^m,\ y = \sqrt{x^2 - a^2},$$

woraus folgt

$$u = (\sqrt{x^2 - a^2})^m = (x^2 - a^2)^{\frac{m}{2}}.$$

Nun ist (N. **19**, 1 u. 4)

$$d.y^m = m\,y^{m-1}\,dy,\ dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx;$$

also wird

$$du = m\,(\sqrt{x^2 - a^2})^{m-1}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = m\,(\sqrt{x^2 - a^2})^{m-2}\,x\,dx.$$

33. Ist

$$v = \psi(u),\ u = \varphi(y),\ y = f(x),$$

so wird nach dem vorstehend Bewiesenen

$$dv = \psi'(u)\,du,\quad du = \varphi'(y)\,dy,\quad dy = f'(x)\,dx,$$

und folglich

$$dv = \psi'(u)\,\varphi'(y)\,f'(x)\,dx,$$

oder, wenn durch dx dividiert wird,

$$\frac{dv}{dx} = \psi'(u)\,\varphi'(y)\,f'(x); \tag{4}$$

also *die Ableitung der Funktion v ist gleich dem Produkt der Ableitungen der drei Funktionen, aus denen sie gebildet wird.* Diese Regel ist offenbar auf eine beliebige Zahl von Funktionen anwendbar.

Dritte Lektion.

Differentiations-Regeln.

Differential einer Summe, — eines Produktes, — eines Quotienten von Funktionen. — Differential einer Potenz, — eines imaginären Ausdruckes. — Regel für die zusammengesetzten Funktionen.

Differential einer Summe.

34. Es seien u, v, z Funktionen von x und

$$y = u + v - z.$$

Ändern wir x in $x + \Delta x$, so erhalten wir

$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - z - \Delta z,$$

und da

$$y = u + v - z,$$

so ist

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta z,$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Durch Übergang zur Grenze erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dz}{dx},$$

und schliesslich

$$dy \text{ oder } d(u + v - z) = du + dv - dz.$$

Also *das Differential einer Summe von Funktionen ist gleich der Summe der Differentiale dieser Funktionen.*

Ist eine der Grössen u, v, z eine Konstante, so verschwindet sie in dem Differential; dieses folgt auch aus dem oben bewiesenen Satze (**28**), dass die Differentiale zweier Funktionen gleich sind, wenn letztere eine konstante Differenz haben.

35. Es sei u eine Funktion von x, a eine Konstante und

$$y = a\,u.$$

Ändern wir x in $x + \Delta x$, so wird

$$y + \Delta y = a\,(u + \Delta u),$$

und, da

$$y = a\,u,$$

so ist

$$\Delta y = a\,\Delta u, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = a\,\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

und an der Grenze

$$\frac{dy}{dx} = a\,\frac{du}{dx},$$

oder schliesslich

$$dy = a\,du.$$

Also *das Differential einer mit einer Konstanten multiplizierten Funktion wird erhalten, indem man das Differential der Funktion mit dieser Konstanten multipliziert.*

36. Ist ferner

$$y = u\,v,$$

so folgt

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v),$$

oder durch Ausführung der Multiplikation

$$y + \Delta y = u\,v + v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v;$$

und da

$$y = u\,v,$$

ist, erhält man

$$\Delta y = v\,\Delta u + u\,\Delta v + \Delta u\,\Delta v,$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\,\Delta v.$$

An der Grenze wird $\frac{\Delta u}{\Delta x}\,\Delta v$ Null, da $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ im allgemeinen einen endlichen Grenzwert hat, und Δv Null wird; also ist

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx},$$

oder schliesslich

$$dy = d(uv) = v\,du + u\,dv.$$

Also *das Differential eines Produktes zweier Funktionen wird erhalten, indem man jede der beiden Funktionen mit dem Differential der anderen multipliziert und die Resultate addiert.*

37. Ist

$$y = uvz,$$

so wird

$$d(uvz) = vz\,du + uz\,dv + uv\,dz.$$

Also *das Differential eines Produktes dreier Funktionen wird erhalten, indem man das Differential jeder einzelnen Funktion mit dem Produkt der beiden anderen multipliziert und die Resultate addiert.*

Diese Regel ist allgemein. Man hat demnach

$$d(uvz..t) = vz..t\,du + uz..t\,dv + uv...t\,dz + ... + uv...dt$$

oder, nach Division durch $uvz..t$,

$$\frac{d(uvz..t)}{uvz..t} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dz}{z} + ... + \frac{dt}{t}.$$

Man kann diese Formel direkt beweisen oder auch indem man zeigt, wenn sie für eine gewisse Anzahl Faktoren gilt, so bleibt sie auch bestehen, wenn noch ein Faktor hinzukommt.

Differential eines Quotienten.

38. Das Differential des Quotienten zweier Funktionen ist leicht aus dem Differential eines Produktes abzuleiten. Ist

$$y = \frac{u}{v},$$

so folgt

$$yv = u,$$

und folglich

$$v\,dy + y\,dv = du.$$

Ersetzt man y durch seinen Wert $\frac{u}{v}$, so erhält man

$$v\,dy + \frac{u}{v}\,dv = du,$$

und demnach

$$dy \text{ oder } d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Also *das Differential eines Quotienten ist gleich dem Nenner multipliziert mit dem Differential des Zählers weniger dem Zähler multipliziert mit dem Differential des Nenners, das Ganze dividiert durch das Quadrat des Nenners.*

Zu diesem Resultate gelangt man auch auf einem direkteren Wege. Man hat

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v},$$

oder

$$\Delta y = \frac{v \Delta u - u \Delta v}{v (v + \Delta v)},$$

und folglich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v (v + \Delta v)}.$$

Durch Übergang zur Grenze erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2},$$

und schliesslich

$$dy \text{ oder } d\frac{u}{v} = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Ist der Zähler u konstant, so reduziert sich das Differential $d\,\frac{u}{v}$ auf $-\frac{u\,dv}{v^2}$.

Differential einer Potenz.

39. Es sei $y = u^m$, und m eine ganze positive Zahl. Wie wir gesehen haben (**37**), war

$$d(u.v.z..t) = vz\ldots t\,du + uz\ldots t\,dv + \ldots + uvz\ldots dt.$$

Werden die Faktoren uvz..t, deren Anzahl m sei, alle einander gleich, so erhält man

$$d.u^m = m u^{m-1} du.$$

Dieses Resultat folgt auch unmittelbar aus der Regel für die Funktionen von Funktionen.

Ist

$$y = \varphi(u) \text{ und } u = f(x),$$

so ist, wie wir wissen,

$$dy = \varphi'(u)\,du;$$

also ist, da

$$d.x^m = m x^{m-1} dx,$$

auch

$$d.u^m = m u^{m-1} du.$$

Ein dritter Weg ist der folgende.

Lassen wir x irgend eine Änderung Δx erleiden, und ist U der Wert, den dann u annimmt, so haben wir

$$y + \Delta y = U^m,$$

und, da

$$y = u^m,$$

so ist

$$\Delta y = U^m - u^m = (U - u)(U^{m-1} + U^{m-2} u + \ldots + u^{m-1}),$$

woraus folgt

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}(U^{m-1} + U^{m-2} u + \ldots + u^{m-1}).$$

Beim Übergang zur Grenze fällt U mit u zusammen, und man erhält

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} m u^{m-1} \text{ oder } dy = m u^{m-1} du.$$

40. Wir wollen jetzt annehmen, der Exponent m sei gleich einem positiven Bruche $\frac{p}{q}$, so ist

$$y = u^{\frac{p}{q}},$$

und folglich

$$y^q = u^p.$$

Da p und q ganze positive Zahlen sind, können wir beide Seiten dieser Gleichung nach der vorhergehenden Regel differenzieren und erhalten

$$q y^{q-1} dy = p u^{p-1} du,$$

oder

$$q y^q dy = p u^{p-1} y du.$$

Nun ist aber

$$y^q = u^p \text{ und } y = u^{\frac{q}{p}};$$

also wird

$$dy = \frac{p}{q} \frac{u^{\frac{p}{q}}}{u} du,$$

oder schliesslich

$$d.u^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} u^{\frac{p}{q}-1} du.$$

Setzen wir m an die Stelle von $\frac{p}{q}$, so erhalten wir wiederum die Formel

$$d.u^m = m u^{m-1} du.$$

41. Ist m = — n, und n eine ganze oder gebrochene positive Zahl, so hat man

$$y = u^{-n} \text{ oder } y = \frac{1}{u^n},$$

und folglich

$$dy = -\frac{d.u^n}{u^{2n}} = -\frac{n u^{n-1}}{u^{2n}} du,$$

oder schliesslich

$$d.u^{-n} = -n u^{-n-1} du,$$

was wiederum, wenn m an die Stelle von — n tritt, auf die Formel

$$d.u^m = m u^{m-1} du$$

führt.

Diese Formel ist also richtig, gleichgültig ob der Exponent m positiv oder negativ, ganz oder gebrochen ist.

42. Dieselbe Formel dient zur Differentiation der Wurzeln. Es ist

$$d\sqrt[n]{u} = d.u^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} u^{\frac{1}{n}-1} du = \frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}.$$

Differential eines imaginären Ausdruckes.

43. Die imaginären in einer algebraischen Rechnung sich ergebenden Ausdrücke sind bekanntlich immer zurückzuführen auf die Form

$$y = u + v\sqrt{-1}.$$

Wird, wie in der Algebra, $\sqrt{-1}$ als eine Konstante aufgefasst, so erhält man durch Änderung von x in $x + \Delta x$

$$y + \Delta y = u + \Delta u + (v + \Delta v)\sqrt{-1},$$

und da

$$y = u + v\sqrt{-1}$$

ist, wird

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v\sqrt{-1},$$

und

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}\sqrt{-1}.$$

Durch Übergang zur Grenze folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\sqrt{-1},$$

und schliesslich

$$dy \text{ oder } d\left(u + v\sqrt{-1}\right) = du + dv\sqrt{-1}.$$

Man erhält also das Differential eines imaginären Ausdruckes wie das einer Summe, vorausgesetzt, dass man $\sqrt{-1}$ wie einen konstanten Faktor behandelt.

Anwendungen.

44. Die vorstehenden Regeln genügen zur Differentiation aller entwickelten algebraischen Funktionen.

Beispiele.

1.
$$y = a + b\sqrt{x} - \frac{c}{x}.$$

Um diese Funktion zu differenzieren, bringen wir sie auf die Form

$$y = a + bx^{\frac{1}{2}} - cx^{-1}$$

und erhalten

$$dy = \tfrac{1}{2}\,bx^{-\frac{1}{2}}\,dx + cx^{-2}\,dx = \frac{b\,dx}{2\sqrt{x}} + \frac{c\,dx}{x^2},$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2\sqrt{x}} + \frac{c}{x^2}.$$

2.
$$y = a + \frac{b}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{c}{x\sqrt[3]{x^4}} + \frac{e}{x^2},$$

oder

$$y = a + bx^{-\frac{2}{3}} - cx^{-\frac{4}{3}} + ex^{-2}.$$

Durch Differentiation erhält man

$$dy = \left(-\frac{2}{3}bx^{-\frac{5}{3}} + \frac{4}{3}cx^{-\frac{7}{3}} - 2\,ex^{-3}\right)dx$$

$$= \left(-\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2e}{x^3}\right)dx,$$

und schliesslich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2b}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4c}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2e}{x^3}.$$

3. $$y = (a + b x^n)^m.$$

Setzen wir

$$a + b x^n = u,$$

so wird

$$y = u^m,$$

und folglich

$$dy = m u^{m-1} du.$$

Nun ist aber

$$du = n b x^{n-1} dx,$$

und demnach

$$dy = m n b (a + b x^n)^{m-1} x^{n-1} dx.$$

45. Wir werden nun zeigen, wie die Differentialrechnung auf die Bestimmung von Kurven mit gegebenen Eigenschaften anzuwenden ist.

1. *Eine Kurve zu bestimmen, so dass deren Subnormale N P für jeden Punkt eine konstante Länge a hat.*

Unter Voraussetzung rechtwinkliger Koordinaten hat man

$$NP = MP \cdot \text{tang } PMN.$$

Da aber $MP = y$, $\text{tang } PMN = \text{tang } MTN = \frac{dy}{dx}$,

so ist auch

$$NP = y \frac{dy}{dx};$$

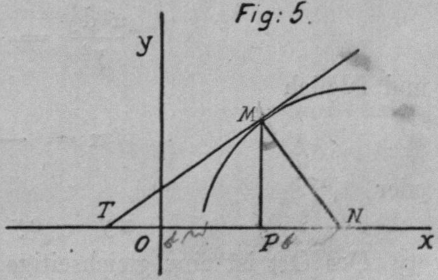


Fig: 5.

also muss man

$$y \frac{dy}{dx} = a$$

setzen. Hieraus folgt

$$y dy = a dx,$$

oder

$$2 y dy = 2 a dx.$$

Nun ist

$$2 y dy = d(y^2),$$

und

$$2 a dx = d(2 a x);$$

folglich ist

$$d(y^2) = d(2 a x).$$

Wenn aber zwei Funktionen dasselbe Differential haben, können sie sich nur durch eine Konstante von einander unterscheiden (**29**); bezeichnet demnach c eine willkürliche Konstante, so erhalten wir als Gleichung des geometrischen Ortes

$$y^2 = 2 a x + c.$$

Diese Gleichung stellt alle Parabeln dar, welche denselben Parameter 2 a und als gemeinsame Axe die x-Axe haben.

2. *Eine Kurve zu bestimmen, deren Subnormale eine gegebene Potenz der Abscisse ist.*

Man hat

$$y \frac{dy}{dx} = x^m, d . \frac{y^2}{2} = d . \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

und folglich

$$y^2 = \frac{2}{m+1} x^{m+1} + c.$$

3. *Eine Kurve zu bestimmen, so dass die Werte der Subtangente PT sich umgekehrt verhalten wie die dazu gehörenden Ordinaten.*

Da $PT = MP . \cot MTP = \frac{y\,dx}{dy}$, ist die Differentialgleichung der gesuchten Kurve

$$y \frac{dx}{dy} = \frac{a^2}{y}.$$

Hieraus folgt

$$dx = \frac{a^2\,dy}{y^2}.$$

Nun ist

$$\frac{a^2\,dy}{y^2} = - d . \frac{a^2}{y},$$

und folglich

$$x = - \frac{a^2}{y} + c,$$

oder

$$xy - cy = - a^2.$$

Der Ort ist eine gleichseitige Hyperbel, die zu Asymptoten die x-Axe und eine Parallele zur y-Axe hat.

4. Sucht man *die Kurve, deren Normale MN konstant ist,* so muss (Fig. 5. S. 29)

$$\overline{MP}^2 + \overline{NP}^2 = y^2 + \frac{y^2\,dy^2}{dx^2} = a^2$$

gesetzt werden; folglich ist

$$y \frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2 - y^2},$$

und

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Also ist

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} + c,$$

und schliesslich

$$(x - c)^2 + y^2 = a^2.$$

Die gesuchte Kurve ist ein Kreis mit dem Radius a, dessen Mittelpunkt auf der x-Axe liegt.

Differentiation zusammengesetzter Funktionen.

46. Nachdem wir Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen differenziert haben, wollen wir uns nun mit der Differentiation von Funktionen beschäftigen, die aus mehreren, und zwar zunächst aus zwei Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen zusammengesetzt sind.

Es sei also

$$y = f(u, v),$$

worin u und v zwei Funktionen der unabhängigen Veränderlichen bezeichnen. Ändert sich x in $x + \Delta x$, so werden u, v, y bezw. $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $y + \Delta y$. Aber statt auf einmal u in $u + \Delta u$ und v in $v + \Delta v$ zu ändern, können diese beiden Änderungen ebensowohl nach einander ausgeführt werden. Wir setzen also zuerst $u + \Delta u$ ein, indem v ungeändert bleibt, wodurch y den Zuwachs

$$f(u + \Delta u, v) - f(u, v)$$

erhält. Dividieren wir diese Gleichung durch Δu und gehen zur Grenze über, indem wir v als unveränderlich betrachten, so wird

$$\lim \frac{f(u + \Delta u, v) - f(u, v)}{\Delta u} = \frac{d\,f(u, v)}{d\,u} = \varphi(u, v).$$

Analog ist

$$\lim \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} = \frac{d\,f(u, v)}{d\,v} = \psi(u, v).$$

Bezeichnet α eine Funktion, die für jeden beliebigen Wert von v zugleich mit Δu verschwindet, und β eine Funktion, die für jeden beliebigen Wert von u zugleich mit Δv verschwindet, so hat man also

$$f(u + \Delta u, v) - f(u, v) = [\varphi(u, v) + \alpha]\,\Delta u, \tag{1}$$

$$f(u, v + \Delta v) - f(u, v) = [\psi(u, v) + \beta]\,\Delta v. \tag{2}$$

Ändert sich in der Gleichung (2) u in $u + \Delta u$, so wird

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u + \Delta u, v) = [\psi(u + \Delta u, v) + \beta']\,\Delta v, \tag{3}$$

worin β' den Wert bezeichnet, den β annimmt, wenn sich darin u in $u + \Delta u$ ändert, und gleichzeitig mit Δv Null wird.

Durch Addition der Gleichungen (1) und (3) und Division der Summe mit Δx erhält man

$$\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta x} = [\varphi(u, v) + \alpha] \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$+ [\psi(u + \Delta u, v) + \beta'] \frac{\Delta v}{\Delta x},$$

und durch Übergang zur Grenze

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(u, v) \frac{du}{dx} + \psi(u, v) \frac{dv}{dx},$$

oder $$dy = \varphi(u, v)\, du + \psi(u, v)\, dv,$$

und schliesslich

$$dy = \frac{dy}{du} du + \frac{dy}{dv} dv. \tag{4}$$

Es ist zu beachten, dass in den partiellen Ableitungen

$$\frac{dy}{du} \text{ und } \frac{dy}{dv}$$

u und v als unabhängige Veränderliche aufzufassen sind, während in den Faktoren du und dv, womit diese Ableitungen multipliziert sind, u und v als Funktionen von x anzusehen sind.

47. Eine der vorstehenden analoge Formel gilt auch für Funktionen, die aus einer grösseren Anzahl von Funktionen der unabhängigen Veränderlichen zusammengesetzt sind. Es sei z. B.

$$y = f(u, v, z),$$

so hat man $\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z) - f(u, v, z)$.

Setzt man

$$\frac{dy}{du} = \varphi(u, v, z), \quad \frac{dy}{dv} = \psi(u, v, z), \quad \frac{dy}{dz} = \chi(u, v, z),$$

so wird nach dem oben Dargelegten

$$f(u + \Delta u, v, z) - f(u, v, z) = [\varphi(u, v, z) + \alpha] \Delta u, \tag{1}$$

$$f(u, v + \Delta v, z) - f(u, v, z) = [\psi(u, v, z) + \beta] \cdot \Delta v, \tag{2}$$

$$f(u, v, z + \Delta z) - f(u, v, z) = [\chi(u, v, z) + \gamma] \Delta z. \tag{3}$$

Durch Änderung von u in der Gleichung (2) erhält man

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v, z) - f(u + \Delta u, v, z) \tag{4}$$
$$= [\psi(u + \Delta u, v, z) + \beta'] \Delta v,$$

und durch Änderung von u und v in der Gleichung (3)

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v, z + \Delta z) - f(u + \Delta u, v + \Delta v, z) \tag{5}$$
$$= [\chi(u + \Delta u, v + \Delta v, z) + \gamma'] \Delta z.$$

Durch Addition der Gleichungen (1), (4) und (5) und Division ihrer Summe mit Δx ergiebt sich

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [\varphi(u, v, z) + \alpha] \frac{\Delta u}{\Delta x} + [\psi(u + \Delta u, v, z) + \beta'] \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$+ [\chi(u + \Delta u, v + \Delta v, z) + \gamma'] \frac{\Delta z}{\Delta x},$$

und durch Übergang zur Grenze

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(u, v, z)\frac{du}{dx} + \psi(u, v, z)\frac{dv}{dx} + \chi(u, v, z)\frac{dz}{dx},$$

oder schliesslich

$$(6) \qquad dy = \frac{dy}{du} \cdot du + \frac{dy}{dv} dv + \frac{dy}{dz} dz.$$

Hieraus folgt allgemein: *Das Differential einer Funktion y, die aus beliebig vielen Funktionen der unabhängigen Veränderlichen zusammengesetzt ist, wird erhalten, indem man dieselbe successiv in Bezug auf jede einzelne Funktion der unabhängigen Veränderlichen differenziert, so dass jedesmal diese allein als veränderlich angenommen wird, und alle so erhaltenen Differentiale addiert.*

Diese Regel umfasst als besondere Fälle alle vorhergehenden über die Differentiation einer Summe, einer Differenz, eines Produktes von Funktionen u. s. w.

Übungen.

1. $y = x^2(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}$, $\quad dy = \frac{2a^4 + a^2x^2 - 5x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}} x\,dx.$

2. $y = \sqrt{\frac{x^3}{a - x}}$, $\quad dy = \frac{(3a - 2x)\sqrt{x}\,dx}{2\sqrt{(a - x)^3}}.$

3. $y = f(a + x)$; $\quad dy = f'(a + x)\,dx.$

4. $y = f(a + bx^2)$, $\quad dy = 2f'(a + bx^2)\,bx\,dx.$

5. $y = f\left(\frac{a}{x}\right)$, $\quad dy = -af'\left(\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x^2}.$

6. $y = \frac{1}{x^2} f\left(\frac{a + x}{b - x}\right)$, $\quad dy = -\frac{2}{x^3} f\left(\frac{a + x}{b - x}\right) dx + \frac{(a + b)f'\left(\frac{a + x}{b - x}\right)}{x^2(b - x)^2} dx.$

Vierte Lektion.

Reihen.

Definitionen. — Lehrsätze über die Konvergenz der Reihen. — Beispiele. — Grenzwert von $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$.

Definitionen.

48. Bevor wir uns zur Differentiation der transcendenten Funktionen wenden, ist es notwendig auf die Theorie der Reihen einzugehen.

Eine Reihe ist eine Aufeinanderfolge einer unendlichen Zahl von Gliedern, die alle nach einem bestimmten Gesetze gebildet sind. Die Summe der n ersten Glieder einer Reihe bezeichnet man gewöhnlich durch S_n. Bezeichnen also u_1, u_2, u_3 .. u_n die aufeinanderfolgenden Glieder der Reihe, vom ersten an, so setzt man

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots u_n.$$

Nähert sich S_n unbeschränkt einem bestimmten endlichen Grenzwerte, wenn man n, von einem hinlänglichen grossen Werte ausgehend, immer mehr wachsen lässt, so sagt man die Reihe ist *konvergent*, und die Grenze S, der sie sich nähert, wird die *Summe* der Reihe genannt. Die Differenz $S - S_n$, die man mit R_n bezeichnet, heisst der *Rest der Reihe*. Nach der Definition ist also

$$R_n = S - S_n, \text{ oder } S = S_n + R_n.$$

Wenn für unbegrenzt zunehmende n die Summe der n ersten Glieder sich nicht unbeschränkt einem festen Grenzwerte nähert, so ist die Reihe *divergent*.

Eine der einfachsten Reihen ist die geometrische Progression

$$a,\ ak,\ ak^2,\ ak^3,\ \ldots .\ ak^{n-1},\ \ldots$$

Diese Reihe konvergiert, wenn k ein echter Bruch ist. Denn man hat für beliebige k

$$S_n = a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} = \frac{a(1-k^n)}{1-k},$$

oder

$$S_n = \frac{a}{1-k} - \frac{ak^n}{1-k}.$$

Ist nun $k < 1$, so kann $\frac{a k^n}{1-k}$ beliebig, klein werden, und $\frac{a}{1-k}$ ist demnach der Grenzwert, dem sich S_n nähert. Ist dagegen $k > 1$, so kann $\frac{a k^n}{1-k}$ grösser werden als jede gegebene Zahl, und die Reihe divergiert. Dasselbe ist der Fall für $k = 1$.

Lehrsätze über die Konvergenz der Reihen.

49. Die Summe einer konvergenten Reihe ist eine bestimmte Grösse, die oft keinen anderen Ausdruck erhalten kann; sie kann in der Rechnung wie eine Funktion der in ihr enthaltenen Buchstabengrössen gebraucht werden. Es ist also wichtig zu wissen, ob eine Reihe konvergiert, und wir wollen nun sehen, wie diese Eigenschaft zu erkennen ist.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz einer Reihe besteht darin, dass die Summe jeder beliebigen Zahl von Gliedern, die auf das n^{te} Glied u_n folgen, beliebig klein gemacht werden kann, wenn n genügend gross wird.

Diese Bedingung ist notwendig; denn wenn die beiden Summen S_n und S_{n+i} für immer grösser werdende n denselben Grenzwert annehmen sollen, muss ihre Differenz sich der Null nähern. Sie ist ferner hinreichend; denn liegt die Summe

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+i}$$

zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$, so liegt S_{n+i} zwischen $S_n - \varepsilon$ und $S_n + \varepsilon$, und diese Grössen werden einander immer näher kommen, wenn n immer mehr wächst, während i unverändert bleibt, aber beliebig gross angenommen werden kann.

50. Aus diesem Satze ergiebt sich der folgende: *Von einem Gliede u_n an müssen für hinlänglich grosse n, die Glieder kleiner als jede gegebene Grösse werden.* Diese Bedingung, die notwendig ist, reicht aber nicht hin. So erfüllt sie z. B. offenbar die Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n},$$

die aber keineswegs konvergiert. Denn fassen wir ihre Glieder in folgender Weise zusammen

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$
$$+ \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \left(\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}\right) + \cdots,$$

so sehen wir, dass jede der in den Klammern enthaltenen Summen grösser als $\frac{1}{2}$ ist, und da die Anzahl dieser Summen unendlich gross ist, hat die Reihe notwendig eine unendliche Summe.

51. Überhaupt, um zu erkennen, ob eine Reihe konvergiert, vergleiche man ihre Glieder von einer bestimmten Stelle an mit denen einer anderen Reihe, die als konvergent bekannt ist; zeigt sich dann, dass die Glieder der ersteren kleiner oder höchstens gleich denen der letzteren sind, so ist die erste Reihe *konvergent*. Die Vergleichung der ersten Glieder kann unterbleiben.

Die Vergleichung einer Reihe mit einer geometrischen Progression führt zu folgenden Sätzen.

52. Satz I. *Eine Reihe, in der alle Glieder, oder wenigstens die sehr weit vom Anfange entfernten positiv sind, konvergiert, wenn von einem bestimmten Gliede an das Verhältnis irgend eines Gliedes zu dem vorhergehenden kleiner als eine bestimmte Zahl k ist, die selbst kleiner als die Einheit ist.*

Diese Bedingung sei von dem Gliede u_m an erfüllt. Dann hat man, wenn $m > n$ ist,

$$u_{m+1} < k\,u_m,$$
$$u_{m+2} < k\,u_{m+1};$$

folglich a fortiori

$$u_{m+2} < k^2 u_m,$$

und ebenso

$$u_{m+3} < k^3 u_m$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_{m+i} < k^i u_m.$$

Also ist

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots + u_{m+i} < u_m (k + k^2 + k^3 + \ldots k^i),$$

oder

$$u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots + u_{m+i} < u_m \frac{k - k^{i+1}}{1 - k}.$$

Nun ist, da $k < 1$ angenommen wird,

$$\frac{k - k^{i+1}}{1 - k}$$

für beliebig grosse i eine endliche Grösse; ferner kann $u_m < k^{m-n} u_n$ kleiner als jede gegebene Grösse werden, wenn m genügend gross gewählt wird: folglich kann der Rest $u_{m+1} + u_{m+2} + \ldots + u_{m+i}$ beliebig klein werden, wenn m genügend gross angenommen wird; die Reihe ist also konvergent.

Die Reihe divergiert dagegen, wenn $k > 1$ ist. Thatsächlich werden, wenn diese Bedingung von u_m an erfüllt wird, die Glieder immer grösser.

53. Satz II. *Eine Reihe mit positiven Gliedern ist konvergent, wenn von einem bestimmten Gliede an beständig*

$$\sqrt[n]{u_n} < k < 1$$

ist. Denn zufolge dieser Bedingung erhält man

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+i} < k^{n+1} + k^{n+2} + \ldots + k^{n+i},$$

oder

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+i} < k^n \frac{k - k^{i+1}}{1 - k},$$

woraus wie vorher zu schliessen ist, dass die Reihe konvergiert.

Dagegen divergiert die Reihe, wenn von einem bestimmten Gliede an immer

$$\sqrt[n]{u_n} > k > 1$$

ist. Denn da hiernach $u_n > k^n$ ist, so folgt, dass für hinlänglich grosse n das Glied u_n und a fortiori auch der Rest der Reihe grösser wird als jede gegebene Zahl (**50**).

54. Bisher wurde angenommen, dass alle Glieder der Reihe oder wenigstens die sehr weit vom Anfange entfernten positiv sind. Nun wollen wir Reihen betrachten, deren Glieder beliebige Vorzeichen haben.

Wenn die neue Reihe konvergiert, die aus der gegebenen entsteht, indem man in ihr von einer bestimmten Stelle an alle Glieder positiv nimmt, so konvergiert auch die gegebene Reihe. Denn der Rest der gegebenen Reihe ist seinem absoluten Betrage nach kleiner als der Rest der umgeformten Reihe; folglich kann er kleiner als jede gegebene Grösse werden.

Diese Konvergenz-Bedingung ist zwar hinreichend aber nicht notwendig.

55. Satz III. *Eine Reihe konvergiert, wenn die weit vom Anfange abstehenden Glieder abwechselnd positiv und negativ sind und unbegrenzt abnehmen.*

Wir wollen annehmen, dieses Gesetz gelte für die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots + u_p + \ldots$$

vom Gliede u_{n+1} an, das positiv sei. Bezeichnen wir mit U_{n+1}, U_{n+2}, U_{n+3} u. s. w. die absoluten Beträge der Glieder u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3} u. s. w., so erhalten wir, wenn $p > n$ ist,

$$S_p = S_n + (U_{n+1} - U_{n+2}) + (U_{n+3} - U_{n+4}) + \ldots;$$

folglich ist

$$S_p > S_n.$$

Ebenso ist

$$S_p = S_n + U_{n+1} - (U_{n+2} - U_{n+3}) - (U_{n+4} - U_{n+5}) \ldots$$

Aus dieser Form ist ersichtlich, dass

$$S_p < S_n + U_{n+1}$$

ist. Folglich ist

$$S_n < S_p < S_n + U_{n+1}.$$

Also liegt S_p immer zwischen S_n und $S_n + U_{n+1}$, und da U_{n+1} beliebig klein werden kann, so konvergiert die Reihe.

56. Bisweilen kommen imaginäre Reihen vor, von der Form $(u_1 + v_1 \sqrt{-1}) + (u_2 + v_2 \sqrt{-1}) + \ldots + (u_n + v_n \sqrt{-1}) + \ldots$. Derartige Reihen konvergieren, wenn jede der beiden Summen $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ und $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots$ eine konvergente Reihe ist.

Untersuchung einiger Reihen.

57. Die vorstehenden Regeln wenden wir nun auf einige Beispiele an.

1. $$1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3..n} + \ldots$$

Diese Reihe konvergiert für jedes beliebige x; denn es ist

$$u_{p+1} = \frac{x^p}{1.2.3\ldots p},$$

$$u_p = \frac{x^{p-1}}{1.2.3\ldots(p-1)},$$

und folglich

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{x}{p}.$$

Wie hieraus ersichtlich ist, kann das Verhältnis eines Gliedes zu dem ihm vorhergehenden immer beliebig klein, und demnach auch kleiner als ein beliebiger Bruch k werden. Die Reihe konvergiert also, und zwar für positive wie für negative x.

Man kann bestimmen, welches Glied in dieser Reihe für einen gegebenen Wert von x das grösste ist.

Angenommen, es ist

$$i < x < i + 1,$$

so ist

$$\frac{x^i}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,..\, i}$$

das grösste Glied. Denn dieser Ausdruck lässt sich durch das Produkt

$$\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots \frac{x}{i}$$

darstellen, dessen Faktoren grösser als 1 sind. Alle vorhergehenden Glieder sind kleiner, weil sie erhalten werden, indem man in dem vorliegenden eine gewisse Anzahl Faktoren, die grösser als 1 sind, unterdrückt. Alle folgenden Glieder sind ebenfalls kleiner, weil sie erhalten werden, indem man das vorliegende mit den Faktoren $\frac{x}{i+1}, \frac{x}{i+2} \ldots$, die kleiner als 1 sind, multipliziert.

Wir wollen nun bei dem Gliede $\frac{x^n}{1.2.3..n}$ stehen bleiben und einen oberen Grenzwert für den Rest R_n bestimmen.

Man hat

$$R_n = \frac{x^n}{1.2\ldots n}\left[\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)\,(n+2)} + \ldots\right],$$

und folglich

$$R_n < \frac{x^n}{1.2\ldots n}\left[\frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{x^3}{(n+1)^3} + \ldots\right],$$

oder, wenn $n + 1 > x$ ist,

$$R_n < \frac{x^n}{1.2\ldots n} \cdot \frac{x}{n+1-x},$$

und schliesslich

$$R_n < \frac{x^{n+1}}{1.2\ldots n} \cdot \frac{1}{n+1-x}.$$

2 Die einzelnen Glieder der Reihe

$$1 + x \cos x + \frac{x^2}{1.2} \cos 2x + \frac{x^3}{1.2.3} \cos 3x + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} \cos nx + \ldots$$

sind kleiner als die entsprechenden Glieder der vorhergehenden Reihe, um so mehr folgt also, dass die neue Reihe konvergiert.

3. $$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

In diesem Falle ist

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = x \cdot \frac{n}{n+1}.$$

Da dieser Bruch mit wachsendem n sich der Grenze x nähert, so konvergiert die Reihe für die Werte von x, die zwischen -1 und $+1$ liegen.

Zu demselben Schlusse gelangt man auch durch Anwendung des zweiten Satzes (**53**). Für den Rest R_n kann man leicht eine obere Grenze bestimmen. Wir haben

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^{n+2}}{n+2} + \ldots < \frac{x^{n+1}}{n+1} (1 + x + x^2 + \ldots),$$

oder, da $x < 1$ ist,

$$R_n < \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

4. $1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1 \cdot 2 \ldots p} x^p + \ldots$

Hier ist

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{m-p+1}{p} x = \left(\frac{m+1}{p} - 1\right) x.$$

Ist $x < 1$ und positiv, so werden die einzelnen Glieder für genügend grosse p abwechselnd positiv und negativ und nähern sich der Null. Also konvergiert die Reihe dann. Dieses ist auch noch der Fall, wenn $x < 0$ und sein absoluter Betrag kleiner als 1 ist; denn der Quotient $\frac{u_{p+1}}{u_p}$ wird dann seinem absoluten Betrage nach schliesslich beständig kleiner werden als ein beliebiger Bruch k, der grösser als x ist. Ist x positiv oder negativ und grösser als 1, so divergiert die Reihe; denn $\left(\frac{m+1}{p} - 1\right) x$ wird dann immer schliesslich grösser als 1 werden.

5. Die Reihe

$$(1) \qquad 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \ldots + \frac{1}{p^m} + \frac{1}{(p+1)^m} + \ldots$$

divergiert für $m = 1$, oder $m < 1$ und konvergiert für $m > 1$.

Denn ist $m = 1$, so erhält man die Reihe

$$(2) \qquad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots,$$

die, wie oben bewiesen, divergiert.

Ist $m < 1$, so muss die Reihe (1) um so mehr divergieren; weil ihre einzelnen Glieder dann grösser sind als die entsprechenden Glieder der Reihe (2).

Ist ferner $m > 1$, so hat man

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{1}{(p+1)^m} : \frac{1}{p^m} = \left(\frac{p}{p+1}\right)^m.$$

Obgleich dieser Quotient beständig kleiner als die Einheit ist, kann er ihr doch beliebig nahe kommen; der erste Satz (**52**) ist

daher nicht anwendbar; aber man kann die Konvergenz der Reihe für $m > 1$ beweisen, indem man die einzelnen Glieder in folgender Weise zusammenfasst:

$$1 + \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m}\right) + \left(\frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m}\right) + \left(\frac{1}{8^m} + \ldots + \frac{1}{15^m}\right) + \ldots,$$

woraus sich ergiebt, dass die Summe der Glieder kleiner ist als

$$1 + \frac{2}{2^m} + \frac{4}{4^m} + \frac{8}{8^m} + \ldots,$$

oder kleiner als die Summe der abnehmenden geometrischen Progression

$$1 + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{4^{m-1}} + \frac{1}{8^{m-1}} + \ldots$$

6. Setzt man in der Reihe

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

$$x = 1,$$

so erhält man die numerische Reihe

$$2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{1}{1.2.3..n} \ldots,$$

die konvergiert, weil sie ein besonderer Fall einer Reihe ist, die für beliebige x konvergiert. Ihre Summe bezeichnet man mit dem Buchstaben e. Die Zahl e liegt zwischen 2 und 3; denn offenbar ist

$$e > 2,$$

und

$$e < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.2.2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots,$$

oder

$$e < 3.$$

Es ist leicht eine obere Grenze für den Rest R_n der Reihe oder für die Summe

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n(n+1)} + \frac{1}{1.2..n(n+1)(n+2)} + \ldots$$

zu bestimmen. Man hat

$$R_n < \frac{1}{1.2.3\ldots n}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3}\right) + \ldots,$$

oder

$$R_n < \frac{1}{1.2.3\ldots.n} \cdot \frac{1}{n}.$$

Wie man sieht, konvergiert die Reihe sehr schnell. Die elf ersten Glieder ergeben $e = 2{,}7182818$, ein Wert, der bis auf ein Zehnmillionstel genau ist.

Grenzwert von $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ für unbegrenzt wachsende m.

58. *Die Zahl e ist die Grenze, der sich der Ausdruck* $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ *nähert, wenn m unbegrenzt wächst.*

Zunächst sei m ganz und positiv. Man hat

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + m.\frac{1}{m} + \frac{m.(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{m^2} + \dots$$
$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}.\frac{1}{m^n} + \dots,$$

wofür sich auch schreiben lässt

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 2 + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \dots$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3..n} + \dots.$$

Die einzelnen Glieder dieses Ausdruckes sind vom zweiten an alle kleiner als die entsprechenden Glieder in der Reihe für e und sie wachsen mit zunehmendem m; folglich wächst $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ mit m, indem es stets kleiner als e bleibt. Die Zähler der ersten Glieder

$$1-\frac{1}{m}, \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots$$

nähern sich unbegrenzt der Einheit, wenn m unendlich gross wird; sie werden demnach gleich denen der Reihe für e. Aber dasselbe gilt nicht für die sehr weit vom Anfange abstehenden Glieder; denn ist z. B. $n-1$ die Hälfte von m, so wird der Faktor $1-\frac{n-1}{m}$ in dem n^{ten} Gliede $\frac{1}{2}$ und der Zähler desselben kleiner als $\frac{1}{2}$. Wählt man jedoch m sehr gross und vernachlässigt in beiden Reihen die sehr weit vom Anfange abstehenden Glieder, deren Summe sehr klein ist, so erkennt man, dass sich beide Reihen nur unendlich wenig von einander unterscheiden, und $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ sich demnach unbegrenzt e nähern muss.

59. Dieses kann übrigens in folgender Weise streng bewiesen werden. Bleibt man bei dem n^{ten} Gliede stehen, so hat man

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 2 + \frac{1-\frac{1}{m}}{1.2} + \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1.2.3} + \dots$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)}{1.2.3\dots n}.$$

Wie gross nun auch n ist, so kann man doch immer die Zahl m, die von n unabhängig ist, so gross wählen, dass der Zähler

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right),$$

der kleiner als die Einheit ist, grösser als $1-\varepsilon$ wird, wenn ε eine bestimmte beliebig kleine Zahl bedeutet. Denn da dieser Zähler grösser als $\left(1-\frac{n-1}{m}\right)^{n-1}$ ist, so genügt es dazu

$$\left(1-\frac{n-1}{m}\right)^{n-1} > 1-\varepsilon$$

zu setzen, woraus sich

$$m > \frac{n-1}{1-\sqrt[n-1]{1-\varepsilon}}$$

ergiebt. Alsdann sind in der Reihe für $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ die Zähler der Glieder bis zum n^{ten} alle grösser als $1-\varepsilon$; wenn man sie also durch $1-\varepsilon$ ersetzt und die auf das n^{te} Glied folgenden vernachlässigt, erhält man

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 2+(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\dots+\frac{1}{1.2.3\dots n}\right),$$

und a fortiori

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m > 2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\dots+\frac{1}{1.2.3\dots n}-\varepsilon.$$

Denn die Summe

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\dots+\frac{1}{1.2.3\dots n},$$

mit der ε multipliziert ist, ist kleiner als

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\dots+ \text{ oder kleiner als } 1.$$

Ferner ist (**57**, 6)

$$e < 2+\frac{1}{1.2}+\dots+\frac{1}{1.2.3\dots n}+\frac{1}{1.2.3\dots n}\cdot\frac{1}{n}.$$

Da wir also zwei Grössen haben, zwischen denen $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ und e liegen, erhalten wir durch Vergleichung der Differenzen

$$e - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{n} + \varepsilon,$$

und da n beliebig gross und ε beliebig klein werden kann; ist e offenbar die Grenze, der sich $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ für unendlich wachsende m nähert.

60. Ist m keine ganze Zahl, so erhält man dieselbe Grenze. Denn in diesem Falle liegt m zwischen zwei ganzen aufeinanderfolgenden Zahlen p und p + 1, und man hat

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{p+1} > \text{und} \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^p,$$

oder

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{p}\right)^p \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right),$$

und

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m > \left(1 + \frac{1}{p+1}\right)^{p+1} : \left(1 + \frac{1}{p+1}\right).$$

Wächst m, so nähern sich die Grössen, zwischen denen $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ immer liegt, da p eine ganze Zahl ist, beide der Grenze e. Also hat auch $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ dieselbe Grenze.

61. Setzt man schliesslich m negativ, gleich $-\mu$, so erhält man

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\mu}{\mu - 1}\right)^{\mu}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right)^{\mu} = \left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right)^{\mu - 1} \left(1 + \frac{1}{\mu - 1}\right),$$

und die Grenze dieses Ausdruckes ist für unendlich grosse μ wiederum e.

62. Die Zahl e ist inkommensurabel. Denn wäre e eine kommensurable Zahl $\frac{a}{b}$, so hätte man $\frac{a}{b} = 2 + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2..b} + \frac{1}{1.2..b\,(b+1)} + \ldots$ Würde dann $2 + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots b}$ auf die linke Seite der Gleichung gebracht, letztere mit 1 . 2 . 3 . . . b multipliziert und durch N eine ganze Zahl bezeichnet, so wäre

$$N = \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \ldots,$$

und somit

$$N > 0.$$

Andererseits ist

$$\frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \ldots < \frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)^2} + \ldots,$$

und somit wäre auch

$$N < \frac{1}{b}.$$

Eine ganze Zahl würde demnach zwischen 0 und $\frac{1}{b}$ liegen, was widersinnig ist: also ist e inkommensurabel.

Fünfte Lektion.

Differentiation der transcendenten Funktionen.

Differentiation der logarithmischen Funktionen, — der Exponentialfunktionen, — der goniometrischen und der cyklometrischen Funktionen.

Logarithmische Funktionen.

63. Es sei y der Logarithmus von x in einem Systeme mit der Basis a, so dass

$$x = a^y;$$

dann ist

$$y + \Delta y = \log(x + \Delta x),$$

und folglich

$$\Delta y = \log(x + \Delta x) - \log x = \log\left((1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

und

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Setzt man $\Delta x = \frac{x}{m}$, so wird

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{m}{x} \log\left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Wird m unbegrenzt gross, so nimmt Δx bis zur Null ab, und $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ erhält den Grenzwert e (**58**); also ist

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log e,$$

und folglich

$$dy \text{ oder } d.\log x = \frac{dx}{x} \log e.$$

64. Nimmt man e zur Basis, so gehören die Logarithmen dem „Nepersches“ genannten Systeme an; wir werden sie dann mit l bezeichnen.

In diesem Systeme ist $l\,e = 1$, und demnach

$$d.\,l\,x = \frac{dx}{x}.$$

Es ist leicht von einem beliebigen Systeme zu dem Neperschen überzugehen und umgekehrt.

Denn aus der Gleichung

$$x = a^y$$

folgt

$$l\,x = y\,l\,a = \log x\,l\,a.$$

Für $x = e$ wird

$$1 = \log e\,.\,l\,a,$$

oder

$$\log e = \frac{1}{l\,a},$$

und somit

$$\log x = l\,x \cdot \frac{1}{l\,a} = l\,x\,.\,\log e.$$

Der konstante Faktor $\frac{1}{l\,a}$ oder log e, mit dem der Npersche Logarithmus einer Zahl multipliziert werden muss, um ihren Logarithmus in einem Systeme mit der Basis a zu erhalten, heisst der Modul des letzteren. Ist $a = 10$, so ist der Modul

$$\log e = 0{,}4342945.$$

Durch Multiplikation der gemeinen Logarithmen mit $\frac{1}{\log e}$ oder $l\,10 = 2{,}3025851$ erhält man die Neperschen Logarithmen.

65. Die Regel für die Differentiation der Logarithmen dient oft zur Differentiation anderer Funktionen.

So kann man sich ihrer bedienen, um u^m zu differenzieren, wenn m beliebig und u eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen ist.

Wir setzen

$$y = u^m, \text{ und folglich } l\,y = m\,l\,u.$$

Durch Differentiation wird

$$\frac{dy}{y} = m\,\frac{du}{u},$$

oder

$$d.u^m = m\,u^{m-1}\,du.$$

Sei ferner

$$y = u\,v\,z,$$

worin u, v, z Funktionen von x bezeichnen. Da diese negative Faktoren enthalten könnten, erheben wir ins Quadrat und nehmen die Logarithmen. Nach der Differentiation und Division mit 2 wird dann

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dz}{z},$$

ein Resultat, das wir auch schon auf anderem Wege erhalten haben.

66. Beispiele.

1. $$y = l\,(x + \sqrt{a^2 + x^2}).$$

Man hat

$$dy = \frac{dx + \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

2. $$y = l\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right).$$

Man beachte zunächst, dass

$$l\left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) = l\,x - l\,\sqrt{a^2 + x^2},$$

woraus folgt

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{a^2 + x^2} = \frac{a^2\,dx}{x\,(a^2 + x^2)}.$$

3. $$y = l\,[(x - a)^m\,(x - b)^n\,(x - c)^p \ldots].$$

Dieser Ausdruck ist gleich

$$m\,l\,(x - a) + n\,l\,(x - b) + p\,l\,(x - c) + \ldots;$$

also ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{x - a} + \frac{n}{x - b} + \frac{p}{x - c} + \ldots$$

Setzt man

$$(x - a)^m\,(x - b)^n\,(x - c)^p \ldots = f\,(x),$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,l\,f(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

und folglich

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{m}{x-a} + \frac{n}{x-b} + \frac{p}{x-c} + \dots$$

Diese Formel bildet die Grundlage für die Theorie der gleichen Wurzeln.

Exponentialfunktionen.

67. Es bezeichne u eine beliebige Funktion von x, und es sei

$$y = a^u.$$

Werden beiderseits die Logarithmen, und zwar grösserer Einfachheit wegen die Neperschen genommen, so wird $l\,y = u \,.\, l a$, und folglich $\frac{dy}{y} = l\,a\,du$;

also ist

$$d.a^u = a^u\,l\,a\,du.$$

68. In dem besonderen Falle, dass $a = e$ und $u = x$ ist, erhält man

$$d\,e^x = e^x\,dx;$$

die Funktion e^x ist also gleich ihrer Ableitung.

Man kann die Frage stellen, ob sie die einzige Funktion ist, der diese Eigenschaft zukommt. Um sie zu beantworten, setzen wir

$$\frac{dy}{dx} = y,$$

woraus

$$\frac{dy}{y} \text{ oder } d\,l\,y = dx$$

folgt; demnach ist

$$l\,y = x + c,$$
$$y = e^{x+c} = e^x\,e^c,$$

oder, wenn man e^c durch C ersetzt,

$$y = C\,e^x.$$

Die unbekannte Funktion muss also das Produkt von e^x in eine Konstante sein.

69. Beispiele.

1. $$y = v^u;$$

y und v sind Funktionen von x.

Man hat

$$l y = u l v$$

und folglich

$$\frac{dy}{y} = d u l v + u \frac{dv}{v}$$

$$dy = y d u l v + \frac{y}{v} u d v,$$

oder

$$d(v^u) = v^u l v d u + v^{u-1} u d v.$$

Dieses Resultat kann auch durch Anwendung der Regel für die zusammengesetzten Funktionen erhalten werden (**47**).

2. $$y = a^{b^x x}$$

$$dy = a^{b^x x} l a b^x d x + a^{b^x x} b^x x l a l b d x.$$

Goniometrische Funktionen.

70. Wir wollen zunächst genau feststellen, unter welchem Gesichtspunkte die goniometrischen Funktionen in der Infinitesimalrechnung betrachtet werden.

Unter sin x, cos x . . . versteht man in der Infinitesimalrechnung ebenso wie in der Trigonometrie Verhältnisse zwischen den so bezeichneten Geraden und dem Radius des Kreises, zu dem sie gehören; diese Symbole bezeichnen also abstrakte Zahlen. Der Buchstabe x bezeichnet die Länge eines in Teilen des Halbmessers gemessenen Bogens, also ebenfalls eine abstrakte Zahl.

Dann ist die Zahl $\pi = 3,1415926$ gleich der Länge des halben Umfanges eines Kreises mit dem Radius 1; $\frac{\pi}{180}$ ist die Länge eines Bogens von 1 Grad, und $\frac{\pi z}{180}$ ist die Länge eines Bogens von z Grad.

Ist z die Zahl der in x enthaltenen Grade, so hat man also

$$x = \frac{\pi z}{180}, \; z = \frac{180}{\pi} x = 57^0\, 16' \,.\, x.$$

Der dem Radius gleiche Bogen beträgt demnach rund $57^0\, 16'$.

71. *Sinus.* — Es sei

$$y = \sin x.$$

Dann ist

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x),$$

und folglich

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x,$$

oder nach einer bekannten Formel

$$\Delta y = 2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \cos \left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right).$$

Also ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x} \cdot \cos \left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right).$$

Wird nun Δx Null, so hat $\frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x}$ die Einheit zur Grenze und $\cos \left(x + \frac{1}{2} \Delta x\right)$ reduziert sich auf $\cos x$; also wird

$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$

oder

$$d \sin x = \cos x \, dx.$$

Wie diese Formel zeigt, nimmt der sinus zu, wenn der zugehörige Bogen von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, und nimmt ab, wenn der Bogen von $\frac{\pi}{2}$ bis π wächst u. s. w., wie an einer Figur ersichtlich ist.

72. Cosinus. — Aus dem Differential des Sinus kann leicht das des Cosinus abgeleitet werden. Man hat

$$\cos z = \sin \left(\frac{\pi}{2} - z\right)$$

und

$$d \cos z = d \sin \left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - z\right) d \left(\frac{\pi}{2} - z\right),$$

oder

$$d \cos z = - \sin z \, dz.$$

73. Tangente. — Das Differential der Tangente berechnet sich aus der Formel

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z},$$

woraus folgt

$$d \operatorname{tang} z = \frac{\cos z \, d \sin z - \sin z \, d \cos z}{\cos^2 z},$$

oder

$$d \operatorname{tang} z = \frac{dz}{\cos^2 z}.$$

Analog findet man

$$d \cot z = - \frac{dz}{\sin^2 z}.$$

Wenn der Bogen wächst, ist, wie man sieht, d tang z immer positiv und d cot z immer negativ, die Tangente nimmt also mit dem Bogen immerfort zu, während die Cotangente beständig abnimmt.

74. Secante. — Man hat

$$\sec z = \frac{1}{\cos z},$$

und folglich

$$d \sec z = \frac{\sin z}{\cos^2 z} dz.$$

75. Die vorstehenden Regeln genügen zur Differentiation aller goniometrischen Funktionen.

Beispiele.

1. $$d \sin (ax + b) = a \cos (ax + b) dx,$$

2. $$d l \sin x = \frac{dx}{\operatorname{tang} x};$$

3. $$d \sin^m x = m \sin^{m-1} x \cos x dx;$$

4. $$d \frac{\operatorname{tang} x}{x} = \frac{2x - \sin 2x}{2x^2 \cos^2 x} dx.$$

5. $$d \frac{\sin x}{x} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} dx = \frac{\cos x (x - \operatorname{tang} x)}{x^2} dx.$$

Da das letztere Differential für $x < \pi$ negativ ist, so muss das Verhältnis $\frac{\sin x}{x}$ beständig abnehmen, wenn x von 0 bis π wächst.

Cyklometrische Funktionen.

76. In den cyklometrischen Funktionen betrachtet man einen Bogen als Funktion seiner trigonometrischen Linien. Den Bogen, dessen Sinus gleich x ist, bezeichnet man durch arc (sin = x) oder einfacher durch arc sin x. Ebenso schreibt man arc cos x, arc tang x.

Arc sinus. — Es sei zunächst

$$z = \operatorname{arc} \sin u,$$

worin u eine Funktion von x ist.

Dann hat man

$$u = \sin z,$$

und folglich

$$du = dz \cos z,$$

$$dz = \frac{du}{\cos z} = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

oder

$$d \text{ arc} \sin u = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Da $\sqrt{1 - u^2}$ für cos z eingeführt ist, muss die Wurzel das Vorzeichen von cos z erhalten.

77. Arc cosinus. — Es sei

$$z = \text{arc} \cos u,$$

und folglich

$$u = \cos z.$$

Dann ist

$$du = - \sin z \, dz;$$

$$dz = - \frac{du}{\sin z} = - \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}},$$

oder

$$d \text{ arc} \cos u = - \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Da $\sqrt{1 - u^2}$ für sin z eingeführt ist, muss die Wurzel das Vorzeichen von sin z erhalten. Infolge des doppelten Wertes von $\sqrt{1 - u^2}$ sind, wie man sieht, die Differentiale von arc sin u und arc cos u für dasselbe u entweder entgegengesetzt gleich oder gleich. Dieses Verhalten kommt daher, dass die beiden Bogen eine konstante Summe oder auch eine konstante Differenz haben können.

78. Arc tangente. — Es sei

$$z = \text{arc tang } u,$$

und folglich

$$\text{tang } z = u.$$

Man hat

$$\frac{dz}{\cos^2 z} = du,$$

$$dz = du \cos^2 z = \frac{du}{1 + u^2},$$

oder

$$d \text{ arc tang } u = \frac{du}{1 + u^2}.$$

In gleicher Weise findet man

$$d \text{ arc cot } u = -\frac{du}{1+u^2}.$$

Wie man sieht, sind d arc tang u und d arc cot u für denselben Wert von u immer entgegengesetzt gleich, da die zugehörigen Bogen immer eine konstante Summe haben.

79. Beispiele.

1. $$d \text{ arc sin } \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a} = \frac{\frac{1}{a}\cdot\frac{2a-2x}{2\sqrt{2ax-x^2}}}{\sqrt{1-\frac{2ax-x^2}{a^2}}}dx = \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

2. $$d \text{ arc sin } (2x\sqrt{1-x^2}) = \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

3. $$d \text{ arc tang } \left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{u^2+v^2}.$$

Mittelst dieser Formel findet man

$$d \text{ arc tang } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dieses Resultat war vorherzusehen; denn es ist

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d \text{ arc sin } x, \text{ arc sin } x = \text{arc tang } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. $$d \text{ arc tang } \frac{u+v}{1-u\cdot v} = \frac{(1-uv)(du+dv)+(u+v)(u\,dv+v\,du)}{(u+v)^2+(1-uv)^2}$$
$$= \frac{(1+v^2)\,du + (1+u^2)\,dv}{(1+u^2)(1+v^2)},$$

oder

$$d \text{ arc tang } \frac{u+v}{1-uv} = \frac{du}{1+u^2} + \frac{dv}{1+v^2},$$

was leicht vorherzusehen war, da

$$\text{arc tang } \frac{u+v}{1-uv} = \text{arc tang } u + \text{arc tang } v$$

ist.

80. Die folgenden Beispiele (1 bis 18), worin alle transcendenten Funktionen miteinander kombiniert sind, geben Gelegenheit die in diesem Kapitel enthaltenen Regeln anzuwenden.

Übungen.

1. $y = e^{x^m}$, $dy = m x^{m-1} e^{x^m} dx.$
2. $y = e^{\sin x}$, $dy = \cos x\, e^{\sin x} dx.$

3. $y = e^{\text{tang}\, x}$, $dy = (1 + \text{tang}^2 x)\, e^{\text{tang}\, x}\, dx$.

4. $y = x^{\sin x}$, $dy = x^{\sin x}\left(\cos x \,.\, lx + \frac{\sin x}{x}\right) dx$.

5. $y = e^{\text{arc}\sin x}$, $dy = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, e^{\text{arc}\sin x}\, dx$.

6. $y = e^{-x^2} \cos bx$, $dy = -e^{-x^2}(2x \cos bx + b \sin bx)\, dx$.

7. $y = l(\cos x)$, $dy = -\text{tang}\, x\, dx$.

8. $y = l(\text{tang}\, x)$, $dy = \frac{2\, dx}{\sin 2x}$.

9. $y = \sin(lx)$, $dy = \frac{1}{x} \cos(lx)\, dx$.

10. $y = \sin^m x \cos^n x$, $dy = \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x\, (m \cos^2 x - n \sin^2 x)\, dx$.

11. $y = \text{arc}\sin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, $dy = \frac{dx}{1 + x^2}$.

12. $y = \text{arc}\cos \frac{a \cos x + b}{b \cos x + a}$, $dy = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b \cos x + a}\, dx$.

13. $y = \text{arc}\,\text{tang}\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right)$, $dy = -\frac{dx}{2(1 + x^2)}$.

14. $y = \text{arc}\,\text{tang} \frac{x - a}{b - x}$, $dy = \frac{(b - a)\, dx}{(x - a)^2 + (b - x)^2}$.

15. $y = \text{arc}\,\text{tang} \frac{ax + b}{c}$, $dy = \frac{ac\, dx}{c^2 + (ax + b)^2}$.

16. $y = l\left(\text{arc}\cos \sqrt{1 - x^2}\right)$, $dy = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\, \text{arc}\sin x}$.

17. $y = l\, \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$, $dy = \frac{\sin x + \cos x}{\sin^2 x}\, dx$.

18. $y = \frac{(2 + e \cos x) \sin x}{(1 + e \cos x)^2}$, $dy = \frac{3e + (2 + e^2) \cos x}{(1 + e \cos x)^3}\, dx$.

19. Eine Kurve zu finden, deren Subtangente konstant ist.
Auflösung.

$$y = c e^{\frac{x}{a}}.$$

20. Eine Kurve zu finden, deren Subtangente einer Potenz der Abscisse proportional ist.

Auflösung.

$$l y = a x^{1-m} + c.$$

21. Eine Kurve zu finden, deren Subnormalen sich umgekehrt verhalten wie die Abscissen.

Auflösung

$$y^2 = 2\, a\, l x + c.$$

Sechste Lektion.

Differentiation der unentwickelten (impliciten) Funktionen. — Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

Unentwickelte Funktionen, die durch eine einzige Gleichung gegeben sind. — Elimination einer Konstanten zwischen der gegebenen Gleichung und der durch Differentiation erhaltenen. — Unentwickelte Funktionen, die durch eine beliebige Anzahl von Gleichungen gegeben sind. — Successive Ableitungen und Differentiale. — Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

Differentiation der unentwickelten Funktionen, die durch eine einzige Gleichung gegeben sind.

81. Unentwickelte (implicite) Funktionen (**5**) werden bekanntlich diejenigen genannt, welche mit der Veränderlichen, von der sie abhängen, durch eine oder mehrere nicht aufgelöste Gleichungen. Zunächst nehmen wir zwei Grössen x und y an, die unter sich verbunden sind.
durch eine einzige Gleichung

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

verbunden sind, und es sei x die unabhängige Veränderliche. Man kann dy oder $\frac{dy}{dx}$ bestimmen, ohne die Gleichung in Bezug auf y aufzulösen. Denn denkt man sich y durch seinen als Funktion von x ausgedrückten Wert, $y = \varphi(x)$, ersetzt, so wird identisch

$$f[x, \varphi(x)] = 0.$$

Nimmt man also das Differential von f (x, y), indem man y als eine Funktion von x betrachtet, so muss dasselbe identisch Null sein, und nach der Regel für die zusammengesetzten Funktionen hat man

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy = 0; \tag{2}$$

folglich ist

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}. \tag{3}$$

Also *die Ableitung der unentwickelten Funktion y wird erhalten, indem man die linke Seite der Gleichung in Bezug auf x und y differenziert und die in Bezug auf x genommene Ableitung durch die in Bezug auf y genommene unter Änderung des Vorzeichens dividiert.*

82. Ist die Gleichung einer Kurve in der Form

$$f(x, y) = 0$$

dargestellt, so gestattet die vorstehende Regel für irgend einen Punkt der Kurve die trigonometrische Tangente d. h. $\frac{dy}{dx}$ zu erhalten, ohne die Gleichung in Bezug auf eine der Veränderlichen aufzulösen.

Beispiele 1. Es sei die Gleichung einer Ellipse

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

gegeben. Durch Differentiation erhält man

$$2 a^2 y\, dy + 2 b^2 x\, dx = 0,$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Die Gleichung der Ellipse giebt für y zwei Werte,

$$y_1 = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},\quad y_2 = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

denen zwei Werte von $\frac{dy}{dx}$ entsprechen, nämlich

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},\quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Im allgemeinen hat $\frac{dy}{dx}$ ebensoviel Werte wie y.

2. $$A y^m + B x^n + C x^p y^q = 0.$$

Man erhält hieraus

$$m A y^{m-1} dy + n B x^{n-1} dx + p C x^{p-1} y^q dx + q C x^p y^{q-1} dy = 0,$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{n B x^{n-1} + p C x^{p-1} y^q}{m A y^{m-1} + q C y^{q-1} x^p}.$$

3. $$x^3 + y^3 - 3 a x y = 0.$$

Hieraus erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a y - x^2}{y^2 - a x}.$$

Da im allgemeinen zu einem Werte von x drei Werte von y oder drei Kurvenpunkte gehören, giebt es auch drei entsprechende Werte von $\frac{dy}{dx}$.

4. Die Gleichung

$$a^2 \sin \frac{x+y}{a} = xy;$$

wäre in Bezug auf y nicht aufzulösen; durch Differentiation giebt sie

$$a \cos \frac{x+y}{a}(dx + dy) = x\,dy + y\,dx;$$

folglich ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - a \cos \frac{x+y}{a}}{a \cos \frac{x+y}{a} - x}.$$

Elimination der Konstanten.

83. Zwischen einer gegebenen Gleichung und der Gleichung, die man aus ihr durch Differentiation ableitet, kann man eine Konstante eliminieren, wodurch sich eine neue Gleichung ergiebt. Letztere drückt eine Eigenschaft der Tangente aus, die allen den Kurven gemeinsam ist, welche durch die gegebene Gleichung dargestellt werden, wenn man darin der Konstante verschiedene Werte beilegt.

Hat man z. B. die Gleichung

$$y^2 = 2ax,$$

so erhält man daraus durch Differentiation

$$y\,dy = a\,dx$$

und durch Elimination von a

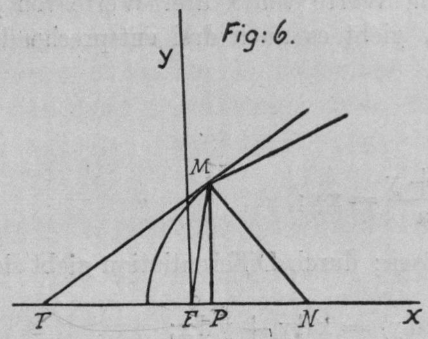
$$y \frac{dx}{dy} = 2x;$$

d. h. *bei allen Parabeln, die dieselbe Axe und denselben Scheitel haben, ist die Subtangente das Doppelte der Abscisse des Berührungspunktes, welchen Wert auch der Parameter 2a hat.*

Die Gleichung

$$y^2 = 2ax + a^2,$$

die eine Reihe von Parabeln mit derselben Axse und demselben Brennpunkte darstellt, führt durch Elimination von a zu der Gleichung



$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

Folglich ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y},$$

oder

$$x + y\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nun ist aber

$$x = FP,\ y\frac{dy}{dx} = PN,\ \sqrt{x^2 + y^2} = FM,$$

und folglich

$$FM = FN,$$

und

$$FM = FT;$$

d. h. *in jeder Parabel ist der Brennpunkt von dem Berührungspunkte der Tangente und von den beiden Punkten, worin die Tangente und die Normale die Axse schneiden, gleich weit entfernt.*

Unentwickelte Funktionen, die durch mehrere Gleichungen gegeben sind.

84. Sind y und z zwei unentwickelte Funktionen von x und man hat die Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$
$$F(x, y, z) = 0, \qquad (2)$$

so kann man $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ erhalten, ohne sie aufzulösen. Denn sind $y = \varphi(x)$ und $z = \psi(x)$ die Werte von y und z, als Funktionen von x dargestellt, die sich aus den Gleichungen (1) und (2) ergeben, und man setzt sie in diese Gleichungen ein, so werden deren linke Seiten

$$f[x, \varphi(x), \psi(x)],\quad F[x, \varphi(x), \psi(x)]$$

identisch Null. Folglich müssen auch ihre Differentiale Null sein. Man muss also die Differentiale von f (x, y, z) und F (x, y, z) gleich Null setzen, indem man darin y, z als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x auffasst.

Man erhält so

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz = 0, \tag{3}$$

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz = 0. \tag{4}$$

Diese Gleichungen enthalten die beiden Unbekannten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ nur in der ersten Potenz; man erhält aus ihnen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{df}{dx}\frac{dF}{dz} - \frac{df}{dz}\frac{dF}{dx}}{\frac{df}{dz}\frac{dF}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{dF}{dz}},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{df}{dy}\frac{dF}{dx} - \frac{df}{dx}\frac{dF}{dy}}{\frac{df}{dz}\frac{dF}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{dF}{dz}}.$$

Enthielte die Gleichung (1) kein x, so hätte man

$$\frac{df}{dx} = 0,$$

und die Gleichung (3) würde einfach

$$\frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz = 0,$$

und folglich

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dz}}.$$

Dieser Ausdruck ist das Verhältnis der Differentiale von z und y als Funktionen von x betrachtet; er ist aber auch die Ableitung von z als Funktion von y aufgefasst, wenn letzteres als unabhängige Veränderliche angesehen wird. Denn setzen wir

$$z = \varphi(y)$$

und differenzieren nach x, so erhalten wir nach der für die Funktionen von Funktionen geltenden Regel

$$dz = \varphi'(y)\, dy,$$

und folglich

$$\varphi'(y) = \frac{dz}{dy}.$$

85. Überhaupt, hat man n Gleichungen zwischen n + 1 Veränderlichen, so wird eine unabhängig und alle anderen werden Funktionen der ersteren sein. Setzt man dann die Differentiale der linken Seiten aller dieser Gleichungen der Null gleich, so erhält man n Gleichungen, die dx, dy, dz u. s. w. nur in der ersten Potenz enthalten, und aus denen die Werte von $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ u. s. w. zu bestimmen sind.

86. Als Beispiel wählen wir die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2, \tag{1}$$

$$ax + by + cz + h = 0. \tag{2}$$

Durch Differentiation ergiebt sich

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0,$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{az - cx}{cy - bz}, \tag{3}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{by - ay}{cy - bz}. \tag{4}$$

Dieses Resultat hat folgende geometrische Bedeutung. Unter Voraussetzung rechtwinkeliger Coordinaten stellt die Gleichung (1) eine Kugel dar, deren Mittelpunkt der Anfang der Coordinaten ist, und die Gleichung (2) eine Ebene. Beide Gleichungen zusammen stellen also den Kreis dar, in dem sich die beiden Flächen schneiden. $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ geben die Neigung der Tangenten gegen die Projektionen dieses Kreises auf die xy- und die xz-Ebene an.

Man kennt also die Projektionen der Tangente auf zwei Coordinatenebenen und folglich auch die Tangente selbst.

Ableitungen und Differentiale von verschiedener Ordnung.

87. Es sei $y = f(x)$ eine beliebige Funktion von x und y' ihre Ableitung. Da diese Ableitung eine Funktion von x ist, kann man sie differenzieren und erhält so die Ableitung von y', die man zweite Ableitung oder Ableitung zweiter Ordnung von y nennt und durch y'' bezeichnet. Ebenso hat y'' eine Ableitung y''', und indem man so fortfährt, erhält man die Ableitungen aller Ordnungen von y. Man stellt sie auch durch $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$. . . dar. Diesen Ableitungen entsprechen die successiven Differentiale von y. Be-

zeichnet h den willkürlichen Zuwachs von h, und wird derselbe als konstant aufgefasst, so hat man

$$dy = y'h,\ d(dy) = d(y'h) = y''h^2,$$

u. s. f. Stellt man d(dy) durch d^2y, $d(d^2y)$ durch d^3y u. s. w. dar, so kann man also schreiben

$$dy = y'h,\ d^2y = y''h^2,\ d^3y = y'''h^3, \ldots d^ny = y^{(n)}h^n.$$

Da h, d. i. der willkürliche Zuwachs von x, dasselbe bedeutet wie dx, werden diese Gleichungen

$$dy = y'dx,\ d^2y = y''dx^2,\ d^3y = y'''dx^3, \ldots d^ny = y^{(n)}dx^n.$$

Hieraus ergeben sich für die successiven Ableitungen folgende Ausdrücke.

$$y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\ y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots,\ y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

88. Beispiele. 1. $y = x^m$.

$$y' \text{ oder } \frac{dy}{dx} = m x^{m-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3},$$

. .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n},$$

. .

$$\frac{d^my}{dx^m} = m(m-1)\ldots.3.2.1.$$

Wenn m eine ganze Zahl ist, hat, wie man sieht $\frac{d^my}{dx^m}$ einen konstanten Wert und die weiteren Ableitungen werden Null.

2. $$y = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots$$

$$\frac{dy}{dx} = mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + (m-2)Cx^{m-3} + \ldots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = m(m-1)Ax^{m-2} + (m-1)(m-2)Bx^{m-3} + \ldots\ldots$$

Ist m eine ganze Zahl, so wird

$$\frac{d^my}{dx^m} = 1.2.3\ldots.m.A,$$

und die folgenden Differentiale sind Null.

3. $$y = a^x$$

$$\frac{dy}{dx} = a^x \, l\, a, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = a^x \, (l\, a)^2, \; \ldots \; \frac{d^n y}{dx^n} = a^x \, (l\, a)^n$$

Ist $a = e$, so hat man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \ldots = \frac{d^n y}{dx^n} = y = e^x.$$

4. $$y = \log x.$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{-1} \log e,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - 1 \, x^{-2} \log e$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 1 \, . \, 2 \, . \, x^{-3} \log e$$

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1} \, 1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, (n-1) \, x^{-n} \log e.$$

5. $$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = - \sin x,$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = - \cos x, \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = \sin x.$$

Die folgenden Ableitungen nehmen periodisch diese vier Werte an.

Es ist auch

$$\frac{dy}{dx} = \sin\left(x + \frac{1}{2}\pi\right),$$

und folglich

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sin\left(x + \frac{2}{2}\pi\right), \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \sin\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) \ldots,$$

und allgemein

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

Für $y = \cos x$ würde man finden

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

89. Ist die Funktion y implicit, so kann man ihre successiven Ableitungen ohne Auflösung ihrer Bestimmungsgleichung erhalten. Es sei

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

so ist

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} y' = 0. \tag{2}$$

Diese Gleichung liefert zunächst den Wert von y′ als Funktion von x und y oder als Funktion von x allein, wenn man y zwischen den Gleichungen (1) und (2) eliminiert.

Nun stelle

$$\varphi(x, y, y') = 0$$

die Gleichung (2), oder allgemeiner, irgend eine Kombination der Gleichungen (1) und (2) dar. Die Funktion φ kann man identisch gleich Null setzen, wenn man darin an Stelle von y und y′ ihre Werte als Funktionen von x setzt. Also ist notwendig $d\varphi = 0$, oder

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy + \frac{d\varphi}{dy'} dy' = 0,$$

und folglich

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} y' + \frac{d\varphi}{dy'} y'' = 0. \tag{3}$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich y″ als Funktion von x, y und y′ oder als Funktion von x allein, wenn man y und y′ zwischen den Gleichungen (1), (2), (3) eliminiert.*)

Ebenso könnte man y‴, y⁗ u. s. w. bestimmen.

Weiter unten (**111**) werden wir sehen, wie die Bestimmungsgleichungen für y″, y‴ u. s. w. mittels der successiven nach x und y genommenen Ableitungen der linken Seite f(x, y) der ursprünglichen Gleichung erhalten werden können.

Vertauschung der unabhängigen Veränderlichen.

90. Hat man n Gleichungen zwischen (n + 1) Veränderlichen y, x, t, u, v . . ., so kann man eine davon als unabhängig betrachten, und annehmen, dass alle anderen als Funktionen derselben dargestellt sind. Wählt man z. B. t, so hat man

$$y = \psi(t) \text{ und } d^n y = \psi^{(n)}(t)\, dt^n.$$

*) Enthält die Gleichung (1) zwei Konstanten, so kann man sie zwischen den Gleichungen (1), (2) und (3) eliminieren, und gelangt so zu einer Gleichung, die eine gemeinsame Eigenschaft aller Kurven ausdrückt, die durch die Gleichung (1) dargestellt werden, wenn diese Konstanten sich ändern (83). Auch eine grössere Zahl von Konstanten könnte man eliminieren, wenn man eine genügende Anzahl von Differentialgleichungen aufstellt.

Nun werde angenommen, dass vorher x die unabhängige Veränderliche war, und dass

$$y = f(x) \text{ und } x = \varphi(t)$$

ist. Durch Elimination von x zwischen diesen beiden Gleichungen erhielte man die Gleichung $y = \psi(t)$, aus der sich durch unmittelbare Differentiation die Ableitungen $\psi'(t), \psi''(t), \ldots \psi^{(n)}(t)$ von y ergeben würden, wenn man y als eine Funktion der neuen unabhängigen Veränderlichen t betrachtet.

Das Problem, das wir jetzt behandeln wollen, besteht nun darin, ohne vorherige Elimination von x durch $f'(x)$, $f''(x)$ u. s. w. und durch die Ableitungen und Differentiale von x, als Funktion von t aufgefasst, die successiven Ableitungen und Differentiale von y, als Funktion von t betrachtet, auszudrücken.

91. Wählt man zu diesem Zwecke t als unabhängige Veränderliche und betrachtet x und y als Funktionen von t, so hat man nach der für die Funktionen von Funktionen geltenden Regel

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Wird diese Gleichung in Bezug auf t differenziert und dx nicht mehr als Konstante, sondern als Funktion von t betrachtet, so hat man

$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x,$$

und ebenso

$$d^3y = f'''(x)\,dx^3 + 3f''(x)\,dx\,d^2x + f'(x)\,d^3x.$$

u. s. f.

Will man an Stelle der nach t genommenen Differentiale von y oder $\psi(t)$, dessen Ableitungen $\psi'(t)$, $\psi''(t)$ u. s. w. erhalten, so genügt es, die vorstehenden Gleichungen bezw. durch dt, dt^2, dt^3 zu dividieren, dann wird

$$\psi'(t) = f'(x)\,\varphi'(t)$$
$$\psi''(t) = f''(x)\,\varphi'(t)^2 + f'(x)\,\varphi''(t)$$
$$\psi'''(t) = f'''(x)\,\varphi'(t)^3 + 3f''(x)\,\varphi'(t)\,\varphi''(t) + f'(x)\,\varphi'''(t).$$

92. Kennt man umgekehrt die Differentiale oder die successiven Ableitungen von x und y, als Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ der unabhängigen Veränderlichen t betrachtet, so kann man daraus die Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$ u. s. w. von y, als Funktion von x betrachtet, erhalten. Denn die vorstehenden Gleichungen ergeben

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

$$f''(x) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}$$

$$f'''(x) = \frac{dx(dx\,d^3y - dy\,d^3x) - 3\,d^2x\,(dx\,d^2y - dy\,d^2x)}{dx^5}$$

worin die Differentiale auf der rechten Seite immer in Bezug auf t genommen sind.

93. Ein anderes Verfahren, zu diesen Formeln zu gelangen, ist das folgende.

Man hat zunächst

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Differenziert man beide Seiten dieser Gleichung in Bezug auf t, so erhält man

$$f''(x)\,dx = d\,.\,\frac{dy}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^2},$$

und durch Division mit dx

$$f''(x) = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}.$$

Eine neue Differentiation in Bezug auf t ergiebt $f'''(x)$ u. s. f.

94. Zu beachten ist, dass die erste Ableitung $f'(x)$ die einzige ist, deren Ausdruck durch die Differentiale von x und y unverändert bleibt, wenn man x nicht mehr zur unabhängigen Veränderlichen nimmt, oder dx nicht mehr konstant ist.

Denn $f'(x)$ wird immer durch $\frac{dy}{dx}$ ausgedrückt, während die anderen Ableitungen $f''(x)$, $f'''(x)$ u. s. w., die durch $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. w. dargestellt werden, kompliziertere Ausdrücke erhalten, wenn x und y als Funktionen der neuen unabhängigen Veränderlichen t aufgefasst werden.

95. Hier bietet sich eine Bestätigung der allgemeinen Formeln dar. Nimmt man x zur unabhängigen Veränderlichen, indem man $x = t$ setzt, so wird

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^3x}{dt^3} = 0,$$

und man erhält

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x)\,\frac{d^2y}{dx^2}, \quad f'''(x)\,\frac{d^3y}{dx^3}, \ldots;$$

dx ist nunmehr konstant, und die Differentiale dx, d^2y etc. sind nach x genommen.

96. Würde man y als unabhängige Veränderliche wählen, so würde die Gleichung

$$y = f(x)$$

in Bezug auf x aufgelöst einen Wert von der Form

$$x = F(y)$$

ergeben. F (y) wird die *inverse Funktion* von f (x) genannt, man müsste dann y = t setzen und erhielte so

$$dy = dt, \quad d^2y = 0, \quad d^3y = 0, \ldots,$$

und ferner

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{F'(y)},$$

$$f''(x) = -\frac{dy\,d^2x}{dx^3} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} = -\frac{F''(y)}{F'(y)^3},$$

$$f'''(x) = \frac{-dx\,dy\;d^3x + 3\,dy\,(d^2x)^2}{dx^5}$$

$$= \frac{-\frac{dx}{dy}\,\frac{d^3x}{dy^3} + 3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5} = \frac{3\,F''(y)^2 - F'(y)\,F'''(y)}{F'(y)^5}$$

— — — — — — — — — — — — — — —

97. Beispiel. Es sei y = f (x) und

$$u = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}{f''(x)},$$

worin dy und d^2y die nach der unabhängigen Veränderlichen x genommenen Differentiale von y oder f (x) bezeichnen.

1. Wird zur unabhängigen Veränderlichen t genommen, das mit x und y durch die Gleichungen

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t)$$

verbunden ist, so ergeben die oben (**92**) gefundenen Beziehungen

$$u = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x},$$

oder

$$u = \frac{\left[1 + \frac{\psi'(t)^2}{\varphi'(t)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}{\varphi'(t)^3}} = \frac{[\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2]^{\frac{3}{2}}}{\varphi'(t)\,\psi''(t) - \psi'(t)\,\varphi''(t)}.$$

2. Wählt man als unabhängige Veränderliche die inverse Funktion y und setzt $x = F(y)$, so erhält man

$$u = -\frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}} = -\frac{[1 + F'(y)^2]^{\frac{3}{2}}}{F''(y)}.$$

Hat man z. B.

$$x = a\,(t - \sin t), \quad y = a\,(1 - \cos t),$$

so wird

$$dx = a\,(1 - \cos t)\,dt, \quad dy = a \sin t\,dt,$$
$$d^2x = a \sin t\,dt^2, \quad d^2y = a \cos t\,dt^2.$$

Die Substitution dieser Werte giebt, wenn das Vorzeichen — weggelassen wird

$$u = 2a\sqrt{2\,(1 - \cos t)} = 2\sqrt{2\,a\,y}.$$

Übungen.

1. $$x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0.$$

Gesucht wird die Ableitung der Funktion y.

Auflösung.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{y + 2\sqrt{(1+x)\,(1+y)}}{x + 2\sqrt{(1+x)\,(1+y)}}.$$

2. $$y = ax + \frac{m}{a}.$$

Die Konstante a ist zu eliminieren.

Auflösung.

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\,\frac{dy}{dx} + m = 0.$$

3. $$y - ax^2 - bx = 0.$$

a und b sind zu eliminieren.

Auflösung.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x}\,\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x^2} = 0.$$

4. $$z = ax + by + c.$$

y ist eine Funktion von x; a, b, c sind zu eliminieren.

Auflösung.

$$\frac{d^3 z}{d x^3} \cdot \frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{d^2 z}{d x^2} \cdot \frac{d^3 y}{d x^3} = 0.$$

5. Beweis, dass, wenn u und v Funktionen von x sind,

$$\frac{d^m uv}{dx^m} = \frac{v\, d^m u}{dx^m} + m \frac{dv}{dx} \cdot \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{d^2 v}{dx^2} \cdot \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \ldots + u \frac{d^m v}{dx^m}.$$

6. $$y = e^{x \cos \vartheta} \cos (x \sin \vartheta).$$

Gesucht wird die m^{te} Ableitung von y.

Auflösung.

$$\frac{d^m y}{dx^m} = e^{x \cos \vartheta} \cos (x \sin \vartheta + m \vartheta).$$

7. $$y = x^n (1 - x)^n.$$

Gesucht wird die m^{te} Ableitung von y.

Auflösung.

$$\frac{d^m y}{dx^m} = n(n-1)\ldots(n-m+1)\,(1-x)^n x^{n-m}$$

$$\times \left[1 - \frac{mn}{n-m+1} \frac{x}{1-x} + \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{n(n-1)}{(n-m+1)(n-m+2)} \frac{x^2}{(1-x)^2} - \ldots\right].$$

8. $$\frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy^3}{dx^3} + e^y \frac{dy^3}{dx^3} = 0.$$

Was wird aus dieser Gleichung, wenn man y zur unabhängigen Veränderlichen wählt?

Auflösung.

$$\frac{d^2 x}{dy^2} + x - e^y = 0.$$

9. $$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}} = 0.$$

Was wird aus dieser Gleichung, wenn man t zur unabhängigen Veränderlichen nimmt und

$$t = l\,(x + \sqrt{1 + x^2})$$

ist?

Auflösung.

$$\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

10. $$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0.$$

$x = \cos t$; t ist zur unabhängigen Veränderlichen zu nehmen.

Auflösung.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0.$$

Siebente Lektion.

Differentiation der Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

Partielle und totale Differentiale. — Eigenschaften des totalen Differentials. — Differential zusammengesetzter Funktionen, — unentwickelter Funktionen. — Ableitungen und Differentiale verschiedener Ordnung. — Lehrsatz über die Reihenfolge der Differentiationen. — Totale Differentiale verschiedener Ordnung von entwickelten und unentwickelten Funktionen.

Partielle und totale Differentiale der Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

98. Es bezeichne

$$u = f(x, y, z)$$

eine Funktion von mehreren unabhängigen Veränderlichen. Ändert man in ihr nur x und nimmt die Ableitung der Funktion in Bezug auf x, so ist diese *partielle Ableitung* der Grenzwert des Verhältnisses $\frac{\Delta u}{\Delta x}$. Derselbe wird eine Funktion $\varphi(x, y, z)$ sein, die man durch $\frac{du}{dx}$ oder durch $\frac{df(x, y, z)}{dx}$ bezeichnet.

Wird die partielle Ableitung mit dx, d. h. also mit dem willkürlichen Zuwachs von x, multipliziert, so erhält man das partielle Differential von u in Bezug auf x oder $\frac{du}{dx}dx$.

Ebenso kann man die Ableitung und das Differential von u in Bezug auf y und in Bezug auf z nehmen.

99. Setzt man

$$\frac{du}{dx} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{du}{dy} = \psi(x, y, z), \quad \frac{du}{dz} = \chi(x, y, z),$$

und bildet die Summe der partiellen Differentiale in Bezug auf alle Veränderlichen, also den Ausdruck

$$\varphi(x, y, z)\, dx + \psi(x, y, z)\, dy + \chi(x, y, z)\, dz,$$

so heisst dieser das *totale Differential* von u. Hierin bezeichnen dx, dy, dz die willkürlichen Änderungen von x, y, z oder Δx, Δy, Δz.

100. Um den Ausdruck der totalen Änderung Δu der Funktion u zu erhalten, verfahren wir analog wie oben bei dem Beweise der für die zusammengesetzten Funktionen geltenden Regel. Bezeichnen α, β, γ Funktionen, die sich bezw. mit Δx, Δy, Δz der Null nähern, so hat man

$$f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z) = [\varphi(x, y, z) + \alpha]\, \Delta x \tag{1}$$

$$f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z) = [\psi(x, y, z) + \beta]\, \Delta y, \tag{2}$$

$$f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = [\chi(x, y, z) + \gamma]\, \Delta z. \tag{3}$$

Ändern wir in der Gleichung (2) x allein und ferner x und y in der Gleichung (3), so wird

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z) - f(x + \Delta x, y, z) = \psi(x + \Delta x, y, z) + \beta']\, \Delta y \tag{4}$$

und

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x + \Delta x, y + \Delta y, z) \tag{5}$$
$$= [\chi(x + \Delta x, y + \Delta y, z) + \gamma']\, \Delta z,$$

wobei β' mit Δx und γ' mit Δx, Δy, Δz Null wird.

Durch Addition der Gleichungen (1), (4) und (5) erhält man

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$
$$= [\varphi(x, y, z) + \alpha]\, \Delta x + [\psi(x + \Delta x, y, z) + \beta']\, \Delta y$$
$$+ [\chi(x + \Delta x, y + \Delta y, z) + \gamma']\, \Delta z,$$

oder, wenn β'' und γ'' neue Funktionen bezeichnen, die sich der Grenze Null nähern,

$$\Delta u = [\varphi(x, y, z)\, \Delta x + \psi(x, y, z)\, \Delta y + \chi(x, y, z)\, \Delta z] \tag{6}$$
$$+ (\alpha\, \Delta x + \beta''\, \Delta y + \gamma''\, \Delta z).$$

Die Änderung der Funktion u besteht also aus zwei Teilen: in dem ersten sind Δx, Δy, Δz mit Funktionen multipliziert, die von ihnen unabhängig, und die die partiellen Ableitungen von u sind;

in dem zweiten sind dieselben Änderungen mit den Grössen α, β'', γ', multipliziert, die gleichzeitig mit ihnen verschwinden.

In dem Falle, dass die unabhängigen Veränderlichen sich auf eine einzige reduzieren, wird der erste Teil das Differential der Funktion genannt; naturgemäss giebt man ihm daher in jedem Falle den Namen totales Differential.

101. Hier folgen einige Beispiele totaler Differentiale.

1. $$u = x^m y^n,\ du = m x^{m-1} y^n dx + n x^m y^{n-1} dy.$$

2. $$u = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$du = \frac{a\sqrt{x^2+y^2}\,dy - ay\,d\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2},$$

und da

$$d\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ist, so wird

$$du = \frac{-axy\,dx + ax^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. $$u = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}$$

$$du = \frac{d\,\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Eigenschaften des totalen Differentials.

102. Bei Funktionen einer Veränderlichen hat, wie wir oben (**22**) sahen, der Quotient aus der Änderung der Funktion durch ihr Differential die Einheit zur Grenze, vorausgesetzt, dass das Differential nicht Null ist. Derselbe Satz gilt auch für die Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher.

Nach der Definition des totalen Differentials ist

$$du = \varphi(x,y,z)\,\Delta x + \psi(x,y,z)\,\Delta y + \chi(x,y,z)\,\Delta z,$$

und demnach (**100**)

$$\Delta u - du = \alpha\,\Delta x + \beta''\,\Delta y + \gamma''\,\Delta z.$$

oder, nach Division durch du

$$\frac{\Delta u}{du} - 1 = \frac{\alpha + \beta''\frac{\Delta y}{\Delta x} + \gamma''\frac{\Delta z}{\Delta x}}{\varphi(x,y,z) + \psi(x,y,z)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \chi(x,y,z)\frac{\Delta z}{\Delta x}}.$$

Werden Δx, Δy, Δz unendlich klein, so nähert sich der Zähler der Null; der Nenner dagegen ist endlich, solange wenigstens einer der Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta z}{\Delta x}$, willkürlich bleibt; wird also du durch die Werte von Δx, Δy, Δz nicht Null, so hat der Quotient $\frac{\Delta u}{du}$ die Einheit zur Grenze.

103. *Ist eine Funktion von mehreren Veränderlichen konstant, so ist ihr totales Differential Null.*

Denn die Ableitung der Funktion in Bezug auf jede Veränderliche ist dann Null und folglich ist auch ihr totales Differential

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0.$$

Hieraus folgt, dass, wenn zwei Funktionen eine konstante Differenz haben, ihre partiellen oder totalen Differentiale gleich sind.

Denn ist $u - v = \text{Const.}$, so wird

$$d(u - v) \text{ oder } du - dv = 0 \text{ und } du = dv.$$

Ist umgekehrt $du = dv$, so hat man

$$d(u-v) = \frac{d(u-v)}{dx}dx + \frac{d(u-v)}{dy}dy + \frac{d(u-v)}{dz}dz = 0,$$

woraus

$$\frac{d(u-v)}{dx} = 0, \quad \frac{d(u-v)}{dy} = 0, \quad \frac{d(u-v)}{dz} = 0$$

folgt. Denn die Änderungen dx, dy, dz sind ganz willkürlich; die Differenz $u - v$ ist demnach von jeder einzelnen der Veränderlichen x, y, z unabhängig (**24**) und somit eine Konstante.

Differentiation der Funktionen, die aus Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher zusammengesetzt sind.

104. Bezeichnet $p = F(u, v)$ eine Funktion, die aus den beiden Funktionen u und v der unabhängigen Veränderlichen x, y, z zusammengesetzt ist, so erhalten wir, indem wir der Reihe nach in Bezug auf jede einzelne Veränderliche differenzieren,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dp}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{du}\frac{du}{dy} + \frac{dp}{dv}\frac{dv}{dy}$$

$$\frac{dp}{dz} = \frac{dp}{du}\frac{du}{dz} + \frac{dp}{dv}\frac{dv}{dz},$$

worin $\frac{dp}{du}$, $\frac{dp}{dv}$, die nach u und v genommenen Ableitungen von $p = F(u, v)$ bezeichnen, die so gebildet sind, als wenn u und v unabhängig wären.

Multiplizieren wir die Ableitungen $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{dz}$ bezw. mit dx, dy, dz und addieren, so erhalten wir das totale Differential von p

$$dp = \frac{dp}{du} du + \frac{dp}{dv} dv.$$

Die Faktoren du und dv, mit denen die partiellen Ableitungen $\frac{dp}{du}$ und $\frac{dp}{dv}$ multipliziert sind, bezeichnen die totalen Differentiale von u und v. Der auf die Differentiation zusammengesetzter Funktionen bezügliche Satz (**47**) gilt also auch in dem Falle, dass mehrere unabhängige Veränderliche vorhanden sind.

Differential unentwickelter Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

105. Es seien die beiden Gleichungen

$$f(x, y, z, u, v) = 0, \qquad (1)$$

$$F(x, y, z, u, v) = 0 \qquad (2)$$

gegeben.

Werden x, y, z als unabhängige Veränderliche gewählt, so sind u und v unentwickelte Funktionen von ihnen. Da nun f (x, y, z, u, v) und F (x, y, z, u, v) für alle Werte von x, y, z den konstanten Wert Null haben, so müssen ihre totalen Differentiale Null sein (**103**), und wir haben demnach

$$\frac{df}{dx} dx + \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dz} dz + \frac{df}{du} du + \frac{df}{dv} dv = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dz} dz + \frac{dF}{du} du + \frac{dF}{dv} dv = 0. \qquad (4)$$

Aus diesen beiden Gleichungen sind die Werte von du und dv, die sie in der ersten Potenz enthalten, abzuleiten.

Ableitungen und Differentiale verschiedener Ordnung.

106. Ist

$$u = f(x, y, z)$$

eine Funktion der unabhängigen Veränderlichen x, y, z; so erhalten

wir nach den für die Funktionen einer Veränderlichen geltenden Regeln unmittelbar die successiven Ableitungen

$$\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2} \ldots \frac{d^nu}{dx^n}; \frac{du}{dy}, \ldots \frac{d^nu}{dy^n}; \frac{du}{dz}, \ldots \frac{d^nu}{dz^n}.$$

Alle diese Ableitungen sind nun Funktionen von x, y und z, die wiederum Ableitungen in Bezug auf jede einzige Veränderliche haben. So kann man z. B. $\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}$ bilden, d. h. von der nach x genommenen Ableitung von u die Ableitung nach y nehmen. Der grösseren Deutlichkeit wegen könnte man diese beiden successiven Operationen durch $\frac{d_y\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}$ oder durch $\frac{d_y d_x u}{dy\,dx}$ bezeichnen; doch genügt es, einfach $\frac{d\,du}{dy\,dx}$ oder $\frac{d^2u}{dy\,dx}$ zu schreiben; da die Reihenfolge der Differentiale dx und dy im Nenner hinlänglich anzeigt, dass zuerst die Ableitung von u nach x, $\frac{du}{dx}$, zu nehmen und dann $\frac{du}{dx}$ nach y zu differenzieren ist. Ebenso bezeichnet $\frac{d^2u}{dx\,dy}$ die nach x genommene Ableitung der nach y genommenen Ableitung von u.

In entsprechender Weise bezeichnet man auch das Resultat einer beliebigen Anzahl von Differentiationen der Funktion u, die in bestimmter Reihenfolge nach den einzelnen in ihr enthaltenen Veränderlichen ausgeführt sind. So bedeutet $\frac{d^4u}{dz\,dx\,dy\,dx}$, dass zuerst $\frac{du}{dx} = u_1$, dann $\frac{du_1}{dy} = u_2$, darauf $\frac{du_2}{dx} = u_3$ und schliesslich $\frac{du_3}{dz} = u_4$ zu nehmen ist. Dieses schliessliche Resultat u_4 ist es, was $\frac{d^4u}{dz\,dx\,dy\,dx}$ ausdrückt.

Lehrsatz über die Reihenfolge der Differentiationen.

107. *Das Endergebnis mehrerer successiver Differentiationen nach verschiedenen Veränderlichen ist unabhängig von der Reihenfolge, in der sie ausgeführt werden.*

Zunächst soll bewiesen werden, dass

$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dy} = \frac{d\frac{du}{dy}}{dx}, \text{ oder dass } \frac{d^2u}{dy\,dx} = \frac{d^2u}{dx\,dy}$$

ist. Werden in der Funktion u nur x und y geändert, so können wir, indem wir von den übrigen Veränderlichen absehen, u durch f (x, y) darstellen und haben dann

$$f(x+h, y) - f(x, y) = \left(\frac{du}{dx} + \alpha\right) h, \tag{1}$$

worin α eine Funktion von x, y und h ist, die für beliebige y gleichzeitig mit h Null wird.

Ändern wir in dieser Gleichung y in y + k, so wird ihre linke Seite

$$f(x+h, y+k) - f(x, y+k).$$

Auf der rechten Seite wird aus $\frac{du}{dx}$

$$\frac{du}{dx} + \frac{d\frac{du}{dx}}{dy} k + \beta k,$$

worin β mit k verschwindet, und α wird einen neuen Wert von der Form $\alpha + \alpha' k$ annehmen, wenn α' für unendlich kleine k den Grenzwert $\frac{d\alpha}{dy}$ hat. Da ferner dieser neue Wert für beliebige k zugleich mit h unendlich klein werden muss, so muss α' auch mit h verschwinden, und man erhält folglich

$$\begin{aligned} & f(x+h, y+k) - f(x, y+k) \\ & = \left(\frac{du}{dx} + \frac{d\frac{du}{dx}}{dy} k + \beta k\right) h + (\alpha + \alpha' k) h. \end{aligned} \tag{2}$$

Ziehen wir die Gleichung (1) von Gleichung (2) ab und dividieren die Differenz durch h k, so wird

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)}{h\,k} \\ & = \frac{d\frac{du}{dx}}{dy} + \beta + \alpha'. \end{aligned} \tag{3}$$

Nehmen h und k unbegrenzt ab, so hat, wie man sieht, die rechte Seite der Gleichung und somit auch die linke den Grenzwert

$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dy}.$$

Lassen wir dagegen in f (x, y) zuerst y und dann x sich ändern, so erhalten wir in gleicher Weise für verschwindende h und k als Grenzwert der linken Seite der Gleichung (3) $\frac{d \frac{du}{dy}}{dx}$.

Da aber diese beiden Grenzwerte einander gleich sein müssen, so hat man

$$\frac{d \frac{du}{dx}}{dy} = \frac{d \frac{du}{dy}}{dx} \text{ oder } \frac{d^2 u}{dy\,dx} = \frac{d^2 u}{dx\,dy}.$$

Man beachte, dass die linke Seite der Gleichung (3) mit zwei Ausdrücken*), nämlich mit

$$\frac{\Delta_y \Delta_x u}{\Delta x \, \Delta y} \text{ und } \frac{\Delta_x \Delta_y u}{\Delta x \, \Delta y}$$

gleichwertig ist; man hat also

$$\Delta_y \Delta_x u = \Delta_x \Delta_y u$$

und auch

$$d_y \, d_x u = d_x \, d_y u.$$

108. Ist eine Funktion mehrere Male nacheinander in Bezug auf verschiedene Veränderliche und in bestimmter Reihenfolge zu differenzieren, so kann, wie das Vorstehende zeigt, die Reihenfolge zweier unmittelbar aufeinander folgender Differentiationen ohne Änderung des Endergebnisses vertauscht werden. Um dann zu beweisen, dass jede Differentiation an eine beliebige Stelle gebracht, und folglich die Reihenfolge der successiven Differentiationen beliebig vertauscht werden kann, wendet man dasselbe Verfahren an, mittels dessen man in der Arithmetik beweist, dass ein Produkt von der Anordnung seiner Faktoren unabhängig ist, nachdem man gezeigt hat, dass zwei aufeinander folgende Faktoren vertauscht werden können. So hat man z. B.

$$\frac{d^6 u}{dx\,dz\,dx\,dy\,dz\,dx} = \frac{d^6 u}{dz\,dz\,dy\,dx\,dx\,dx} = \frac{d^6 u}{dz^2\,dy\,dx^3}$$

109. Beispiele 1. $u = x^m y^n$

$$\frac{du}{dx} = m\,x^{m-1} y^n, \quad \frac{du}{dy} = n\,x^m y^{n-1},$$

*) $\Delta_x u$ bezeichnet die Zunahme von u, wenn x in $x + \Delta x$ übergeht, während y unverändert bleibt. $\Delta_y \Delta_x u$ ist die Zunahme von $\Delta_x u$, wenn y sich in $y + \Delta y$ ändert, während x unverändert bleibt. Die Ableitung von u nach x bezeichnet man zuweilen durch $d_x u$. Alsdann ist $d_y \, d_x u = d_y \, (d_x u)$.

$$\frac{d\,\frac{du}{dx}}{dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx} = m\,n\,x^{m-1}\,y^{n-1},$$

$$\frac{d\,\frac{du}{dy}}{dx} = \frac{d^2u}{dx\,dy} = m\,n\,x^{m-1}\,y^{n-1} = \frac{d^2u}{dy\,dx}.$$

2. $u = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}$.

$$\frac{du}{dx} = \frac{-y}{x^2+y^2},\quad \frac{du}{dy} = \frac{x}{x^2+y^2}:$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dx} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{d^2u}{dx\,dy}$$

Totale Differentiale verschiedener Ordnung von Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen.

110. Es sei u eine Funktion der drei unabhängigen Veränderlichen x, y, z: wir stellen uns nun die Aufgabe, deren totale Differentiale du d^2u, d^3u u. s. w. zu berechnen.

Das erste Differential ist

$$du = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz}\,dz.$$

Das totale Differential von du oder das totale Differential zweiter Ordnung von u entsteht, indem man von jedem Gliede von du das totale Differential bildet; somit erhalten wir die Ausdrücke

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\,dx + \frac{d^2u}{dx\,dy}\,dy + \frac{d^2u}{dx\,dz}\,dz\right)dx$$

$$+\left(\frac{d^2u}{dy\,dx}\,dx + \frac{d^2u}{dy^2}\,dy + \frac{d^2u}{dy\,dz}\,dz\right)dy$$

$$+\left(\frac{d^2u}{dz\,dx}\,dx + \frac{d^2u}{dz\,dy}\,dy + \frac{d^2u}{dz^2}\,dz\right)dz,$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{d^2u}{dx\,dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx} \text{ u. s. w. ist,}$$

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}\,dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}\,dy^2 + \frac{d^2u}{dz^2}\,dz^2$$

$$+\,2\,\frac{d^2u}{dx\,dy}\,dx\,dy + 2\,\frac{d^2u}{dx\,dz}\,dx\,dz + 2\,\frac{d^2u}{dy\,dz}\,dy\,dz.$$

Wie man sieht, kann d^2u gebildet werden, indem man das erste Differential $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz$ ins Quadrat erhebt, und nach dessen Entwickelung im Zähler jedes Gliedes d^2u statt du^2 schreibt. Unter dieser Bedingung gilt die symbolische Formel

$$d^2u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right)^{(2)},$$

und allgemein

$$d^nu = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right)^{(n)}.$$

Der in () gesetzte Exponent zeigt an, dass die Formel symbolisch aufzufassen ist, d. h.. dass nach ihrer Entwickelung d^nu an die Stelle von du^n treten muss. Die allgemeine Geltung dieser Formel wird bewiesen, indem man zeigt, wenn sie für einen Index n richtig ist, so gilt sie auch für den Index $n+1$. Denn irgend ein Glied der symbolischen Entwickelung von d^nu hat die Form

$$k\frac{du^n}{dx^p\,dy^q\,dz^r}dx^p\,dy^q\,dz^r, \tag{1}$$

worin

$$p + q + r = n$$

und

$$k = \frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots q \times 1.2\ldots r}$$

ist. Das entsprechende Glied von d^nu ist

$$k\frac{d^nu}{dx^p\,dy^q\,dz^r}dx^p\,dy^q\,dz^r, \tag{2}$$

und man erhält $d^{n+1}u$, indem man das totale Differential eines jeden Gliedes von d^nu bildet. Das totale Differential des Ausdruckes (2) kann nun erhalten werden, indem man dessen symbolische Darstellung (1) mit

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz \tag{3}$$

multipliziert, und nach der Entwickelung des Produktes statt du^{n+1} $d^{n+1}u$ setzt. Das totale Differential von d^nu, d. h. $d^{n+1}u$ wird demnach erhalten, indem man den symbolischen Ausdruck von d^nu mit der Summe (3) multipliziert, durch deren n^{te} Potenz d^nu bezeichnet wird. Also hat man auch die symbolische Formel

$$d^{n+1}u = \left(\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz\right)^{(n+1)}.$$

Partielle Ableitungen unentwickelter Funktionen.

111. Eine Gleichung $f(x, y) = 0$ zwischen den beiden Unbekannten x und y ergiebt, wie wir sahen,

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (\alpha)$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}.$$

Die Ableitungen höherer Ordnung $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ u. s. w. kann man durch die partiellen Ableitungen verschiedener Ordnung von $f(x, y)$ darstellen; denn differenziert man die Gleichung (α) nach x, indem man dx als konstant ansieht, so erhält man

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \qquad (\beta)$$

woraus $\frac{d^2y}{dx^2}$ zu bestimmen ist.

Durch wiederholte Differentiation erhält man successiv

$$\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}, \ldots\ldots$$

112. Hat man zwischen drei Veränderlichen nur eine Gleichung

$$f(x, y, z) = 0, \qquad (1)$$

so sind zwei Veränderliche, z. B. x und y, unabhängig, und die dritte z ist eine bestimmte Funktion derselben. Die successiven Ableitungen von z findet man in folgender Weise.

Differenziert man die Gleichung (1) nach x, von dem z eine Funktion ist, so erhält man

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = 0, \qquad (2)$$

woraus $\frac{dz}{dx}$ zu bestimmen ist. Analog hat man

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{dz}{dy} = 0, \qquad (3)$$

woraus sich der Wert von $\frac{dz}{dy}$ ergiebt.

Durch Differentiation der Gleichung (2) nach x erhält man

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dz}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{d^2f}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} = 0,$$

woraus $\frac{d^2z}{dx^2}$ zu bestimmen ist.

Differenziert man die Gleichung (2) nach y oder die Gleichung (3) nach x, so ergiebt sich in gleicher Weise

$$\frac{d^2 f}{dx\,dy} + \frac{d^2 f}{dy\,dz} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{d^2 f}{dx\,dz} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{d^2 f}{dz^2} \cdot \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy}$$
$$+ \frac{df}{dz} \cdot \frac{d^2 z}{dx\,dy} = 0,$$

woraus sich $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$ ergiebt.

Durch Differentiation der Gleichung (3) nach y erhält man ferner

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + 2\frac{d^2 f}{dy\,dz} \cdot \frac{dz}{dy} + \frac{d^2 f}{dz^2}\left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + \frac{df}{dz} \cdot \frac{d^2 z}{dy^2} = 0,$$

woraus der Wert von $\frac{d^2 z}{dy^2}$ zu erhalten ist. Analog können auch

$$\frac{d^3 z}{dx^3}, \frac{d^3 z}{dx^2\,dy}, \ldots\ldots$$

bestimmt werden.

113. Ist z. B. die Gleichung der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$$

gegeben, so erhält man

$$x + z\frac{dz}{dx} = 0, \quad y + z\frac{dz}{dy} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z\frac{d^2 z}{dx^2} = 0, \quad 1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + z\frac{d^2 z}{dy^2} = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dz}{dy} + z\frac{d^2 z}{dx\,dy} = 0.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z},$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\frac{x^2 + z^2}{z^3}, \quad \frac{d^2 z}{dy^2} = -\frac{y^2 + z^2}{z^3}, \quad \frac{d^2 z}{dx\,dy} = -\frac{xy}{z^3}.$$

Übungen.

1. $u = \arcsin\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}, \quad du = \frac{x\sqrt{2}}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 - y^2}}(y\,dx - x\,dy).$

2. $u = z^{y^x}, \quad du = y^{y^x}\left(ly\,lz\,dx + \frac{x}{y}\,lz\,dy + \frac{dz}{z}\right).$

3. Sind u, v, z Funktionen irgend welcher Veränderlichen und wird ein vollständiges Differential durch d bezeichnet, so ist

$$d\,uvz = vz\,du + uz\,dv + uv\,dz.$$

4. Folgende Formeln sind zu beweisen:

$$d^2.uvz - ud^2.vz - vd^2.uz - zd^2.uv + vzd^2.u + uzd^2.v + uvd^2.z = 0,$$

$$d^3.uvz - ud^3.vz - vd^3.uz - zd^3.uv + vzd^3.u + uzd^3.v + uvd^3.z = 6\,du\,dv\,dz.$$

5. Sind u und φ Funktionen einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen, so ist, für $ih < m$

$$(d^i.u\varphi^n)^h - m(\varphi d^i.u\varphi^{m-1})^h + \frac{m(m-1)}{1.2}(\varphi^2 d^i.u\varphi^{m-2})^h - \dots$$

$$\mp m(\varphi^{m-1} d^i.u\varphi)^h \pm (\varphi^m d^i.u)^h = 0.^{*})$$

Achte Lektion.

Analytische Anwendungen der Differentialrechnung. Reihenentwickelung für Funktionen einer Veränderlichen.

Beweis des Taylor'schen Satzes. — Bemerkung über dessen Gebrauch. — Andere Formen des Restes. — Die Maclaurinsche Reihe. — Bemerkungen über dieselbe. — Zweiter Beweis des Taylorschen Satzes.

Beweis des Taylorschen Satzes.

114. Bezeichnet f(x) eine ganze positive Funktion vom m^{ten} Grade und h die Änderung von x, so kann, wie die elementare Algebra lehrt, f(x + h) in eine Reihe entwickelt werden, deren Glieder nach positiven ganzen Potenzen von h geordnet sind. Man erhält so die Formel

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \dots$$
$$+ \frac{h^m}{1.2\dots m}f^{(m)}(x),$$

worin f'(x), f''(x) u. s. w. die successiven Ableitungen von f(x) bedeuten.

Diese Reihe enthält m + 1 Glieder, da $f^{(m)}(x)$ konstant ist, und die Ableitungen höherer Ordnung Null sind.

*) Bezüglich dieser und analoger Formeln vergleiche man die Abhandlung von Prouhet „sur quelques formules générales d'analyse" (Lionville, t. XXI, p. 321).

Ist f (x) keine ganze Funktion, so ist sie nicht mehr durch eine Reihe der vorstehenden Form mit beschränkter Gliederzahl darzustellen, man kann aber dann jedenfalls setzen

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2\,3} f'''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x) + R.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass f (x), f' (x), f'' (x) ... $f^{(n)}$ (x) sämmtlich endlich und stetig bleiben. Erfüllt nun R die Bedingung, dass für ins Unendliche wachsende n lim R = 0 ist, so ist f (x + h) als die Summe der obigen unendlichen Reihe zu betrachten. Nach (**49**) folgt dann, dass die Reihe konvergiert. Wir wollen nun diesen durch R bezeichneten Rest der Reihe genauer untersuchen.

Es ist

$$R = f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1} f'(x) - \frac{h^2}{1.2} f''(x) - \ldots$$
$$- \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x). \tag{1}$$

Setzen wir x + h = z, und somit h = z — x, so wird

$$R = f(z) - f(x) - (z-x) f'(x) - \frac{(z-x)^2}{1.2} f''(x) - \ldots$$
$$- \frac{(z-x)^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x). \tag{2}$$

R hängt, wie man sieht von x, z und n ab.

Da x und z unbestimmt und von einander unabhängig sind, so kann man x ändern, indem z konstant bleibt, und das Differential oder die Ableitung von R nach x nehmen.

Man erhält

$$\frac{dR}{dx} = - f'(x) - (z-x) f''(x) - \frac{(z-x)^2}{1.2} f'''(x) - \ldots$$
$$- \frac{(z-x)^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n+1)}(x)$$
$$+ f'(x) + (z-x) f''(x) + \frac{(z-x)^2}{1.2} f'''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{(z-x)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n)}(x).$$

Auf der rechten Seite der Gleichung heben sich alle Glieder bis auf das $(n+1)^{te}$ gegenseitig auf; also ist einfach

$$\frac{dR}{dx} = - \frac{(z-x)^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n+1)}(x). \tag{3}$$

Mittels dieser Formel können wir zwei Grenzen bestimmen, zwischen denen der Rest R liegt.

Setzen wir auf der rechten Seite an die Stelle von $f^{(n+1)}(x)$ eine willkürliche Konstante C, so haben wir

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{(z-x)^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+1)} C = - \frac{(z-x)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} C.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichung von der vorhergehenden erhalten wir für beliebige x und z die Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left[R - \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} C\right] = \frac{(z-x)^n}{1.2.3\ldots n}\left[C - f^{(n+1)}(x)\right] \quad (4)$$

115. Wir setzen nun $x < z$ oder, da $h = z - x$ ist, h positiv.

Ferner nehmen wir an, dass wenn x von irgend einem Werte, der kleiner als z ist, bis z wächst, die Funktion $f^{(n+1)}(x)$ endlich und stetig bleibt, und bezeichnen den grössten Wert, den sie dabei annimmt, mit M und den kleinsten mit m. Wird dann in der obigen Gleichung C durch M ersetzt, so wird für Werte von x, die bis z wachsen, die rechte Seite der Gleichung (4) positiv oder wenigstens nicht negativ sein.*)

Man hat folglich

$$\frac{d}{dx}\left[R - \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} M\right] > 0.$$

Während also x bis z wächst, wächst auch die Funktion

$$R - \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3..(n+1)} M$$

beständig, weil ihre Ableitung positiv bleibt oder doch nicht negativ wird. Nun wird aber für $x = z$ die Funktion

$$R - \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3..(n+1)} M$$

Null, weil dann nach (2) R gleich Null ist; demnach ist sie für $x < z$ negativ, und folglich ist

$$R < \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3..(n+1)} M.$$

Ersetzt man in Gleichung (4) C durch den kleinsten Wert m von $f^{(n+1)}(x)$, so wird

$$\frac{d}{dx}\left[R - \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3..(n+1)} m\right] < 0.$$

*) Für besondere Werte von x könnte sie Null werden.

Lassen wir also x von irgend einem Werte bis z wachsen, so nimmt die Funktion $R - \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3..(n+1)}m$ ab, weil ihre Ableitung negativ ist; und da sie nach (2) für $x = z$ Null wird, muss sie für $x < z$ positiv sein. Folglich ist

$$R > \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3..(n+1)}.$$

Somit haben wir zwei Grenzwerte für R bestimmt.

116. Wir nehmen nun $x > z$ oder h negativ und bezeichnen wie vorher durch M und m den grössten und den kleinsten Wert den $f^{(n+1)}(x)$ annimmt, wenn x von z bis zu irgend einem anderen Werte wächst, der grösser als z ist. Wenn wir dann in Gleichung (4) die Konstante C das eine Mal durch M, das andere Mal durch m ersetzen, so erhalten wir für gerade n

$$\frac{d}{dx}\left[R - \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3..(n+1)}M\right] > 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left[R - \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3..(n+1)}m\right] < 0.$$

Wenn also x von z bis zu irgend einem anderen Werte wächst, so wächst auch die Funktion $R - \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3..(n+1)}M$, und da sie für $x = z$ Null ist, so bleibt sie positiv. Folglich ist

$$R > \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3...(n+1)}M.$$

In gleicher Weise findet man

$$R < \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3...(n+1)}m.$$

Ist n ungerade, so ergeben sich für R dieselben Grenzwerte wie soeben aber in umgekehrter Reihenfolge; demnach sind dann die beiden Ungleichheiten dieselben, wie wenn $x < z$ ist.

117. Aus dem Vorstehenden ergiebt sich, dass für $M > K > m$ immer

$$R = \frac{(z-x)^{n+1}}{1.2.3...(n+1)}K$$

ist.

Wir legen nun x einen festen willkürlichen Wert bei und bezeichnen mit x′ eine Veränderliche, deren Wert zwischen den beiden bestimmten Grenzwerten x und z oder x und $x + h$ liegt. Die

Funktion $f^{(n+1)}(x')$, von der angenommen wird, dass sie endlich und stetig bleibt, wenn x' von x in x + h übergeht, wird successiv alle die Werte durchlaufen, die zwischen ihrem grössten Werte M und ihrem kleinsten m liegen; für einen gewissen zwischen x und x + h enthaltenen Wert der Veränderlichen x' wird sie demnach der Grösse K gleich werden. Dieser Wert von x' kann durch $x + \vartheta h$ dargestellt werden, wenn ϑ eine positive Zahl bedeutet, die kleiner als die Einheit und im übrigen unbekannt ist. Man hat demnach

$$f^{(n+1)}(x + \vartheta h) = K,$$

und R erhält den Ausdruck

$$R = \frac{h^{(n+1)}}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x + \vartheta h). \tag{5}$$

Setzt man diesen Ausdruck dem in (1) gegebenen gleich, so erhält man die Formel von Taylor

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(x + \vartheta h), \tag{6}$$

worin h positiv oder negativ sein kann. Diese Formel gilt für alle Werte von x und x + h, die zwischen zwei Grenzen a und b, $a \lessgtr b$, liegen; vorausgesetzt, dass $f^{(n+1)}(x)$ für alle zwischen a und b liegenden Werte von x endlich und stetig bleibt, und dass ausserdem jede der Funktionen $f(x)$, $f'(x)$, ... $f^{(n)}(x)$ für x einen endlichen und bestimmten Wert hat. Diese Funktionen bleiben dann für alle Werte von x zwischen a und b endlich und stetig wie $f^{(n+1)}(x)$. Eine Funktion bleibt nämlich in einem gewissen Intervalle endlich und stetig, wenn ihre Ableitung nur endliche Werte hat. Denn wie die Formel

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = [\varphi'(x) + \alpha] \Delta x$$

zeigt, ändert sich $\varphi(x)$ gleichzeitig mit x stetig, wenn $\varphi'(x)$ immer endlich ist.

Die Ableitungen von höherem als dem $(n + 1)^{\text{ten}}$ Grade unterliegen keinen Bedingungen.

Andere Formen des Restes.

118. Wenn nur von der Funktiox $f^{(n)}(x')$ nicht aber von der Funktion $f^{(n+1)}(x')$ bekannt ist, dass sie endlich und stetig bleibt, während x' aus **x** in x + h übergeht, so kann man schreiben

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(x)$$
$$+ \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x + \vartheta h).$$

Addieren und subtrahieren wir auf der rechten Seite $\frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x)$, so erhalten wir

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x)$$
$$+ \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\left[f^{(n)}(x+\vartheta h) - f^{(n)}(x)\right]. \tag{7}$$

Der Rest, den man der Summe der $n+1$ ersten Glieder der unendlichen Reihe

$$f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x) + \ldots$$

hinzufügen muss, um den genauen Wert von $f(x+h)$ zu erhalten, nimmt also die neue Gestalt an

$$R = \frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\left[f^{(n)}(x+\vartheta h) - f^{(n)}(x)\right]. \tag{8}$$

Die Zahl ϑ, die kleiner als die Einheit ist, hat hier in den Formeln (7) und (8) nicht denselben Wert wie in Formel (6).

Die Formel (7) setzt voraus, dass $f^{(n)}(x')$ für alle Werte von x' zwischen x und $x+h$ endlich und stetig bleibt; bezüglich der Ableitungen von höherer als der n^{ten} Ordnung stellt sie keine Bedingungen auf. Dieselben könnten für Werte von x', die zwischen x und $x+h$ liegen, unendlich oder unstetig werden, ohne dass die Geltung der Formel aufhören würde. Daher kann, wenn x einen besonderen Wert erhält, die in (7) gegebene Entwickelung von $f(x+h)$ giltig sein, wenn man bei einem bestimmten Gliede stehen bleibt, und ungültig werden, wenn man über dieses hinaus geht.

Sei z. B.

$$f(x) = \varphi(x) + (x-a)^{\mu}\, \psi(x),$$

worin der Exponent μ eine positive gebrochene oder inkommensurable Zahl ist und zwischen den ganzen Zahlen n und $n+1$ liegt. Für $x=a$ sind die Ableitungen von $f(x)$ bis einschliesslich $f^{(n)}(x)$ endlich und stetig, wenn es die Ableitungen von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ sind; aber die Ableitungen höherer Ordnung von $f(x)$ werden für $x=a$ unendlich. Die Entwickelung von $f(x+h)$ darf also nicht über

das Glied $\frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot\cdot n} f^{(n)}(a)$ hinausgeführt werden, und zur Ergänzung ist ihr der Rest

$$\frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\left[f^{(n)}(a + \vartheta h) - f^{(n)}(a)\right]$$

zuzufügen, der eine stetige Funktion von h ist.

119. Der Rest der Taylorschen Reihe kann auch auf eine andere Form gebracht werden, die zuweilen nützlich ist.

Bezeichnet $\varphi(x)$ eine beliebige Funktion von x, so ist nach (6)

$$\varphi(x + h) = \varphi(x) + h\,\varphi'(x + \vartheta h),$$

oder, wenn wir z — x statt h setzen,

$$\varphi(z) = \varphi(x) + (z - x)\,\varphi'[x + \vartheta(z - x)].$$

Wenn aber $\varphi(x)$ den Rest R darstellt, ist [nach (3)]

$$\varphi(z) = 0 \text{ und } \varphi'(x) = \frac{-(z - x)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{(n+1)}(x),$$

und wir erhalten mittels der vorhergehenden Gleichung

$$\varphi(x) = R = (z - x)\frac{[z - x - \vartheta(z - x)]^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{(n+1)}[x + \vartheta(z - x)],$$

oder

$$R = \frac{h^{n+1}(1 - \vartheta)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{(n+1)}(x + \vartheta h); \tag{9}$$

ϑ bezeichnet einen positiven echten Bruch, sein Wert ist hier nicht derselbe wie in den Formeln (6) und (7).

Bemerkung über die Taylorsche Reihe.

120. Wenn die Entwickelung der Taylorschen Reihe bei einem beliebigen Gliede $\frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{(n)}(x)$ abgebrochen wird, das nicht Null ist, kann h immer so klein gewählt werden, dass dieses Glied seinem absoluten Betrage nach grösser als der Rest ist, der zu der Summe

$$f(x) + h f'(x) + \cdot\cdot + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{(n)}(x)$$

zu addieren ist, damit sie den genauen Ausdruck von $f(x + h)$ ergiebt. Zum Beweise wählen wir die unter (8) aufgestellte zweite Form des Restes. Damit das h^n enthaltende Glied, wenn für jeden Faktor dessen absoluter Betrag gesetzt wird, grösser als der dazugehörige Rest wird, muss

$$\frac{h^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(x) > \frac{h^n}{1.2.3\ldots n} [f^{(n)}(x+\vartheta h) - f^{(n)}(x)]$$

oder einfach

$$f^{(n)}(x) > f^{(n)}(x+\vartheta h) - f^{(n)}(x)$$

sein. Diese Bedingung wird aber immer erfüllt, wenn man h hinlänglich klein wählt, vorausgesetzt, dass $f^{(n)}(x)$ nicht Null ist, und $f^{(n)}(x')$ für alle zwischen x und $x+h$ liegenden Werte von x' endlich und stetig bleibt; weil dann die Differenz $f^{(n)}(x+\vartheta h) - f^{(n)}(x)$ gleichzeitig mit h Null wird.

Wie man sieht, nähert sich auch das Verhältnis des Restes R zu dem h^n enthaltenden Gliede, bei dem die Reihenentwickelung abgebrochen wird, gleichzeitig mit h der Null.

Die Maclaurinsche Reihe.

121. Setzen wir in den Gleichungen (6), (7) und in der mittelst (9) erhaltenen Formel $x = 0$ und schreiben x statt h, so ergeben sich die Formeln

$$\left.\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(0) \\
&\quad + \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(\vartheta x), \\
f(x) &= f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(0) \\
&\quad + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} [f^{(n)}(\vartheta x) - f^{(n)}(0)], \\
f(x) &= f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(0) \\
&\quad + \frac{x^{n+1}(1-\vartheta)^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n+1)}(\vartheta x).
\end{aligned}\right\} \quad (10$$

Auf diese Weise ist eine beliebige Funktion von x in eine Reihe zu entwickeln, deren Glieder nach ganzen steigenden Potenzen von x geordnet sind, vorausgesetzt, dass die Ableitung von der $(n+1)^{\text{ten}}$ oder von der n^{ten} Ordnung von $f(x')$ für alle zwischen 0 und x liegenden Werte von x' endlich und stetig bleibt.

Wird, für unendlich wachsende n, und wenn x unter einer gewissen Grenze liegt, einer der Ausdrücke

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(\vartheta x), \quad \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} [f^{(n)}(\vartheta x) - f^{(n)}(0)],$$

$$\frac{x^{n+1}(1-\vartheta)^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n+1)}(\vartheta x)$$

Null, so konvergiert die unendliche Reihe

$$f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \dots$$

und ihre Summe ist f (x); man hat also

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \dots$$

Dieses ist die Reihe von Maclaurin. Wäre sie vor der Taylorschen Reihe bewiesen, so könnte man die letztere aus ihr ableiten, indem man f (x + h) als eine Funktion von h auffasst, und sie mittels einer der Formeln (10) nach steigenden Potenzen von h entwickelt.

Bemerkungen über die Maclaurinsche Reihe.

122. Wenn für x = 0 die Funktion f (x) oder eine ihrer Ableitungen unendlich oder unstetig wird, so kann f (x) nicht nach der Formel von Maclaurin entwickelt werden. Setzt man aber alsdann in der Formel (6) a für x und x — a für h, so kann man nach Potenzen von x — a entwickeln und erhält

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \dots$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{1.2.3\dots n} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{1.2.3\dots(n+1)} f^{(n+1)}[a + \vartheta(x-a)]. \quad (11)$$

Die Grösse a unterliegt dann nur der Bedingung, dass $f^{(n+1)}(x')$ für alle Werte von x' von a bis x endlich und stetig bleibt, und die Reihe wird um so schneller konvergieren, je kleiner die Differenz x — a ist.

123. Die Funktion f (x) kann nur mittelst der Maclaurinschen Formel in eine konvergente Reihe nach ganzen steigenden Potenzen von x entwickelt werden; denn angenommen, eine andere konvergente Reihe wäre

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots,$$

so hätte man

$$[A - f(0)] + [B - f'(0)]x + \left[C - \frac{f''(0)}{1 . 2}\right] x^2 + \dots = 0.$$

Für x = 0 reduziert sich die vorstehende Gleichung auf A = f (0). Wird durch x dividiert und wiederum x = 0 gesetzt, so erhält man B = f' (0). Analog erhält man $C = \frac{f''(0)}{1 . 2}$ u. s. w.

Ebenso giebt die Formel von Taylor die einzige mögliche Entwickelung von f (x + h) nach ganzen steigenden Potenzen von h.

124. Man muss nicht glauben, dass die Summe der unendlichen Reihe von Maclaurin, wenn letztere konvergiert, immer f (x) ist; sondern sie kann auch gegen eine von f (x) verschiedene Grenze konvergieren. Die Funktion $e^{-\frac{1}{x^2}}$ z. B., wird mit allen ihren Ableitungen Null für x = 0; wird sie nach der Maclaurinschen Formel entwickelt, so sind demnach alle Glieder der letzteren Null, während die Funktion nicht Null ist. Ist $\varphi (x)$ eine Funktion, die nach der Maclaurinschen Formel entwickelt werden kann, und man setzt

$$f(x) = \varphi(x) + e^{-\frac{1}{x^2}};$$

so giebt f (x), nach dieser Formel entwickelt, eine konvergente Reihe, deren Summe aber $\varphi (x)$ und nicht die entwickelte Funktion f (x) ist. Eine Funktion f (x) ist nur dann gleich der unendlichen Reihe von Maclaurin, wenn der zu addierende Rest, bei unendlicher Anzahl ihrer Glieder kleiner als jede gegebene Grösse wird.

Analoge Bemerkungen gelten auch für die Taylorsche Reihe.

Anderer Beweis der Taylorschen Reihe.

125. Es sei m der kleinste und M der grösste Wert, den $f^{(n+1)}(x)$ annimmt, wenn x von x_0 bis X wächst. Liegt dann a + h zwischen x_0 und X, so ist

$$f^{(n+1)}(a+h) - m > 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt aber die nach h genommene Ableitung der Funktion

$$f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a) - hm$$

dar; die letztere wächst also mit h, und da sie für h = 0 Null ist, so ist für h > 0

$$f^{(n)}(a+h) - f^{(n)}(a) - hm > 0.$$

Die linke Seite dieser neuen Ungleichung ist nun die nach h genommene Ableitung der Funktion

$$f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a) - hf^{(n)}(a) - \frac{h^2 m}{1.2};$$

letztere wächst also mit h, und da sie gleichzeitig mit h Null wird, so ist für h > 0

$$f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a) - hf^{(n)}(a) - \frac{h^2 m}{1.2} > 0.$$

Analog hat man

$$f^{(n-2)}(a+h) - f^{(n-2)}(a) - hf^{(n-1)}(a) - \frac{h^2}{1.2} f^{(n)}(a) - \frac{h^3 m}{1.2.3} > 0,$$

$$f^{(n-3)}(a+h) - f^{(n-3)}(a) - h f^{(n-2)}(a) - \ldots - \frac{h^4 m}{1.2.3.4} > 0,$$

— — — — — — — — — — — — — —

$$f(a+h) - f(a) - h f'(a) - \frac{h^2}{1.2} f''(a) - \ldots - \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a)$$
$$- \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} m > 0. \qquad (1)$$

Ebenso findet man

$$f(a+h) - f(a) - h f'(a) - \frac{h^2}{1.2} f''(a) - \ldots - \frac{h^n}{1.2..n} f^{(n)}(a)$$
$$- \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} M < 0. \qquad (2)$$

Aus diesen beiden Ungleichheiten folgt

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2..n} f^{(n)}(a) + R,$$

worin R zwischen $\frac{h^{n+1}}{1.2.3..(n+1)}$ m und $\frac{h^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)}$ M liegt; man kann R folglich (**117**) durch $\frac{h^{n+1}}{1.2..(n+1)} f^{(n+1)}(a+\vartheta h)$ darstellen, wenn $f^{(n+1)}(x)$ für alle zwischen x_0 und X liegenden Werte von x endlich und stetig bleibt.

Man hat also

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a)$$
$$+ \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} f^{(n+1)}(a+\vartheta h),$$

und das ist die Taylorsche Reihe mit ihrem Ergänzungsgliede.

Der Zuwachs h wurde bisher positiv angenommen; ist er negativ, so ändert sich in dem vorstehenden Beweise nur der Sinn der Ungleichheiten (1) und (2).*)

*) Die Taylorsche Reihe ist neuerdings untersucht von Herrn A. Pringsheim. Man vergl. dessen Abhandlungen „Zur Theorie der Taylorschen Reihe und der analytischen Funktionen mit beschränktem Existenzbereich" (Math. Ann. 42, 1893, p 153—184), „Über Funktionen, welche in gewissen Punkten endliche Differentialquotienten jeder endlichen Ordnung, aber keine Taylorsche Reihenentwickelung besitzen", und über die notwendigen und hinreichenden Bedingungen des Taylorschen Lehrsatzes für Funktionen einer reellen Variablen." (ibid. 44, 1894, p. 41—56, u. p. 57—82), wo auch die Arbeiten anderer Mathematiker erwähnt werden.

G.

Neunte Lektion.

Anwendungen der Maclaurinschen Reihe.

Entwickelung der Exponentialfunktionen. — Entwickelung von sin x und cos x. — Binomischer Satz für beliebige Exponenten. — Entwickelung von log (1 + x). — Formeln zur Berechnung der Logarithmen. — Die Logarithmen als Grenzwerte algebraischer Funktionen betrachtet.

Entwickelung der Exponentialfunktionen.

126. Es sei

$$f(x) = e^x.$$

Da alle Ableitungen ebenfalls gleich e^x sind, hat man

$$f(0) = 1,\ f'(0) = 1, \ldots, f^{(n+1)}(\vartheta x) = e^{\vartheta x},$$

und folglich

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3..n} + \frac{x^{n+1}\,e^{\vartheta x}}{1.2.3..(n+1)}.$$

Der Rest $\frac{x^{n+1}\,e^{\vartheta x}}{1.2.3..(n+1)}$ nähert sich für beliebige x um so mehr der Null je grösser n wird. Denn es ist

$$\frac{x^{n+1}}{1.2.3..(n+1)} = \frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdots\frac{x}{i}\cdot\left(\frac{x}{i+1}\cdot\frac{x}{i+2}\cdots\frac{x}{n+1}\right):$$

bezeichnet nun $k < 1$ eine bestimmte Zahl, so muss man da die Faktoren abnehmen, notwendig zu einem Faktor $\frac{x}{i+1} < k$ gelangen, und das Produkt $\frac{x}{i+1}\cdot\frac{x}{i+2}\cdots\frac{x}{n+1}$ wird kleiner als eine Potenz von k sein, deren Exponent gleich der Anzahl der Faktoren ist, d. h. kleiner als k^{n+1-i}. Wird n hinlänglich gross gewählt, so kann folglich, da $e^{\vartheta x}$ endlich bleibt, das Produkt $\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdots\frac{x}{n+1}$ und demgemäss auch der Rest $\frac{x^{n+1}\,e^{\vartheta x}}{1.2.3\ldots(n+1)}$ kleiner als jede gegebene Grösse werden. Die Reihe konvergiert also und ihre Summe ist e^x.

127. Hieraus kann die Entwickelung von a^x abgeleitet werden. Denn beachtet man, dass $a = e^{la}$ und $a^x = e^{x\,l\,a}$ ist, und setzt in der für e^x erhaltenen Reihe x l a statt x, und $a^{\vartheta x}$ statt $e^{\vartheta x l a}$, so wird

$$a^x = 1 + \frac{x\,l\,a}{1} + \frac{x^2 (l\,a)^2}{1.2} + \frac{x^3 (l\,a)^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n (l\,a)^n}{1.2.3..n}$$
$$+ \frac{x^{n+1} (l\,a)^{n+1}}{1.2.3..(n+1)} a^{\vartheta x}.$$

Dieses Resultat ist auch direkt zu erhalten.

Entwickelung von sin x und cos x.

128. Es sei

$$f(x) = \sin x.$$

Bezeichnet n eine beliebige gerade Zahl, so ist

$$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x$$
$$f''''(x) = \sin x, \ldots f^{(n)}(x) = \mp \sin x,\ f^{(n+1)}(x) = \mp \cos x,$$

und folglich

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1, \ldots$$
$$f^{(n)}(0) = 0,\ f^{(n+1)}(\vartheta x) = \mp \cos(\vartheta x).$$

Dabei ist $\cos(\vartheta x)$ positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem $n + 1$ die Form $4p + 1$ oder $4p + 3$ hat.

Man erhält also

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}$$
$$\mp \frac{x^{n+1}}{1.2.3...(n+1)} \cos(\vartheta x).$$

Da $\cos(\vartheta x)$ kleiner als die Einheit ist, und man (**126**) n immer so gross wählen kann, dass $\frac{x^{n+1}}{1.2..(n+1)}$ kleiner als jede gegebene Grösse wird, so konvergiert die vorstehende Reihe für beliebige x, und ihre Summe ist sin x.

Ist $x > \frac{\pi}{2}$, so hängt das Vorzeichen von $\cos(\vartheta x)$ von dem Werte von ϑ ab, und man kann dann im allgemeinen nicht wissen, in welchem Sinne ein Fehler entsteht, wenn die Reihe bei einem bestimmten Gliede abgebrochen wird. Wenn aber, wie es gewöhnlich der Fall ist, $x < \frac{\pi}{2}$ ist, so ist $\cos(\vartheta x)$ immer positiv und der erwähnte Fehler wird abwechselnd positiv oder negativ.

129. Nun sei

$$f(x) = \cos x.$$

Ist n eine beliebige ungerade Zahl, so wird

$$f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x;$$
$$f'''(x) = \sin x,\ f''''(x) = \cos x, \ldots$$
$$f^{(n)}(x) = \mp \sin x,\ f^{(n+1)}(\vartheta x) = \mp \cos(\vartheta x),$$

und folglich

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$\mp \frac{x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} \cos(\vartheta x).$$

Man hat also (**126**) für beliebige x

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

Binomischer Satz für beliebige Exponenten.

130. Wir wollen nun $(a+b)^m$ entwickeln, wenn m irgend eine Zahl bezeichnet. Setzt man $\frac{b}{a} = x$, so wird

$$(a+b)^m = [a(1+x)]^m = a^m (1+x)^m.$$

Die Aufgabe ist demnach auf die Entwickelung von $(1+x)^m$ zurückgeführt. Setzen wir

$$f(x) = (1+x)^m,$$

so ist

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1},\ f''(x) = m.(m-1)(1+x)^{m-2},$$
$$f^{(n)}(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$
$$f^{(n+1)}(\vartheta x) = m(m-1)\ldots.(m-n)(1+\vartheta x)^{m-n-1},$$

und folglich

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m.(m-1)}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} x^n$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots.(m-n)}{1.2.3\ldots(n+1)} x^{n+1} (1+\vartheta x)^{m-n-1}.$$

131. Zuerst werde seinem absoluten Betrage nach $x > 1$ angenommen. Alsdann divergiert die Reihe. Denn zwei unmittelbar aufeinander folgende Glieder haben den Ausdruck

$$u_{p+1} = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2.3\ldots p} x^p,$$

$$u_p = \frac{m(m-1)\ldots(m-p+2)}{1.2.3\ldots(p-1)} x^{p-1};$$

und folglich ist

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \left(\frac{m+1}{p} - 1\right) x.$$

Dieser Quotient nähert sich für wachsende p der Grenze $-x$, und da $x > 1$ ist, so divergiert die Reihe.

132. Ist dagegen seinem absoluten Betrage nach $x < 1$, so konvergiert die Reihe und ihre Summe ist $(x+1)^m$. Denn nehmen wir zuerst x positiv an, so ist

$$R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)\,x^{n+1}}{1.2.3\ldots(n+1)} \cdot \left(\frac{1}{1+\vartheta x}\right)^{n+1-m}.$$

Der erste Faktor kann auf die Form gebracht werden

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)\,x^i}{1.2.3\ldots i} \cdot \left(\frac{m-i}{i+1} x \,.\, \frac{m-i-1}{i+2} x \ldots \frac{m-n}{n+1} x\right).$$

Die in der letzten Parenthese eingeschlossenen, mit der ersten Potenz von x multiplizierten Faktoren konvergieren für hinlänglich grosse i gegen $-x$, und wenn k ein positiver echter Bruch und grösser als x ist, kann i so gross gewählt werden, dass jeder dieser Faktoren, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner als k ist.

Ihr Produkt ist dann kleiner als k^{n+1-i} und folglich für wachsende n beliebig klein. Also kann auch das gesamte Produkt $\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n+1)} x^{n+1}$ für wachsende n beliebig klein werden.

Was den Faktor $\left(\frac{1}{1+\vartheta x}\right)^{n+1-m}$ anbetrifft, so wird sein Exponent schliesslich positiv, und er hat daher auch die Null zur Grenze, wofern ϑ, das von n abhängt, nicht ebenfalls unendlich klein wird; jedenfalls aber ist er kleiner als die Einheit. Folglich nähert sich der Rest R für wachsende n der Null und die Summe der Reihe ist für jedes positive x, das kleiner als die Einheit ist, gleich $(1+x)^m$. Da ferner der Rest sein Vorzeichen ändert, wenn n um eine Einheit zunimmt, so werden die successiven Summen der Reihe abwechselnd kleiner und grösser als $(1+x)^m$.

133. Ist x negativ, so wird der Faktor $\left(\frac{1}{1+\vartheta x}\right)^{n+1-m}$ unend-

lich, wofern nicht ϑ die Null zur Grenze hat. Man setze alsdann [**121**, (10), 3te Formel]

$$R = \frac{m.(m-1)\ldots(m-n)\,x^{n+1}}{1.2.3\ldots n}(1-\vartheta)^n(1+\vartheta x)^{m-n-1}.$$

Setzt man hierin $x = -z$, so wird seinem absoluten Betrage nach

$$R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots n} z^{n+1}(1-\vartheta)^n \frac{(1-\vartheta z)^{m-1}}{(1-\vartheta z)^n}$$

oder

$$R = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots n} z^{n+1}\left(\frac{1-\vartheta}{1-\vartheta z}\right)^n \cdot (1-\vartheta z)^{m-1}.$$

Hierin nähert sich der erste Faktor mit wachsendem n der Null (**132**).

Da zweitens $\frac{1-\vartheta}{1-\vartheta z} < 1$ ist, kann $\left(\frac{1-\vartheta}{1-\vartheta z}\right)^n$ kleiner als jede bestimmte Grösse werden, wofern ϑ nicht die Null zur Grenze hat, und auch dann ist dieser Faktor kleiner als die Einheit.

Drittens ist $(1-\vartheta z)^{m-1} < 1$, wenn $m-1$ positiv, und $< \frac{1}{(1-z)^{1-m}}$, wenn $m-1$ negativ; demnach in jedem Falle endlich. R kann somit für genügend grosse n kleiner als jede gegebene Grösse werden.

Liegt also x zwischen -1 und $+1$, so ist für beliebige m

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots$$

Entwickelung von log (1+x).

134. Da die Funktion $l(x)$ und ihre Ableitungen für $x = 0$ unendlich werden, können wir sie nicht nach der Maclaurinschen Formel entwickeln; es sei daher

$$f(x) = l(1+x).$$

Man erhält

$$f'(x) = (1+x)^{-1},\ f''(x) = -1(1+x)^{-2},\ f'''(x) = 1.2(1+x)^{-3}\ldots$$
$$f^{(n)}(x) = \pm 1.2\ldots(n-1)(1+x)^{-n},$$
$$f^{(n+1)}(\vartheta x) \mp 1.2.3\ldots n(1+\vartheta x)^{-n-1},$$

und folglich

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}}.$$

Das Verhältnis eines Gliedes zu dem ihm unmittelbar vorhergehenden ist seinem absoluten Betrage nach gleich $\frac{p}{p+1}x$ und

konvergiert für wachsende p gegen x. Die Reihe divergiert also, wenn der absolute Betrag von $x > 1$ ist (**52**).

Wir nehmen daher nun an, dass x, absolut genommen, kleiner als 1 ist, und werden beweisen, dass die Reihe alsdann immer konvergiert, und dass ihre Summe $l(1+x)$ ist.

1. x ist positiv. Man hat

$$R = \frac{1}{n+1}\left(\frac{x}{1+\vartheta x}\right)^{n+1}.$$

$\frac{x}{1+\vartheta x}$ ist ein echter Bruch; seine $(n+1)^{te}$ Potenz kann daher kleiner als jede gegebene Grösse werden, und dasselbe gilt a fortiori von R.

2. x ist negativ. Wir setzen $x = -z$ und erhalten, vom Vorzeichen abgesehen

$$R = \frac{1}{n+1}\,\frac{z^{n+1}}{(1-\vartheta z)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{z}{1-\vartheta z}\right)^{n+1}.$$

Hieraus erkennt man aber nicht, dass sich der Rest der Null nähert; wir setzen daher [**121**, (10), 3^{te} Formel]

$$R = \frac{x^{n+1}(1-\vartheta)^n}{1.2.3\ldots n}\, f^{(n+1)}(\vartheta x) = .\, x^{n+1}(1-\vartheta)^n.\frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}},$$

oder

$$R = \left(\frac{z-\vartheta z}{1-\vartheta z}\right)^n \cdot \frac{z}{1-\vartheta z}.$$

Nun ist $\frac{z-\vartheta z}{1-\vartheta z} < z < 1$; folglich kann $\left(\frac{z-\vartheta z}{1-\vartheta z}\right)^n$ und demnach auch $\left(\frac{z-\vartheta z}{1-\vartheta z}\right)^n \cdot \frac{z}{1-\vartheta z}$ kleiner als jede gegebene Grösse werden.

Liegt also x zwischen $+1$ und -1, so ist

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad (1)$$

Formeln zur Berechnung der Logarithmen.

135. Aus der Reihe (1) lassen sich sehr bequeme Formeln zur Berechnung der Neperschen Logarithmen ableiten.

Setzt man $x = \frac{h}{y}$, so wird

$$l(1+x) = l\left(1+\frac{h}{y}\right) = l(y+h) - l\,y,$$

Bayerische Staatsbibliothek München

und folglich

$$l(y+h) - l\,y = \frac{h}{y} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{y}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{y}\right)^3 - \ldots$$

Für $h = 1$ wird

$$l(y+1) - l\,y = \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3} - \ldots$$

Mittels dieser Formel kann $l(y+1)$ aus $l\,y$ und einer Reihe berechnet werden, die für sehr grosse y sehr schnell konvergiert.

Man kann jedoch auch eine noch bequemere Reihe entwickeln. Vertauschen wir in der Formel (1) x mit $-x$, so wird

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots, \qquad (2)$$

und folglich

$$l(1+x) - l(1-x) = l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right).$$

Setzen wir nun

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{h}{y}, \text{ oder } x = \frac{h}{2y+h}$$

und beachten, dass

$$l\left(1 + \frac{h}{y}\right) = l(y+h) - l\,y$$

ist, so erhalten wir

$$l(y+h) - l\,y = 2\left(\frac{h}{2y+h} + \frac{1}{3}\,\frac{h^3}{(2y+h)^3} + \ldots\right). \qquad (3)$$

Mittels dieser Reihe kann $l\,10$ berechnet werden. Nehmen wir zuerst $y = 1$, $h = 1$, so wird

$$l\,2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \ldots\right),$$

und ferner ist

$$l\,4 = 2\,l\,2, \text{ und [nach (3)] } l\,5 = l\,4 + 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \ldots\right);$$

folglich ist

$$l\,10 = l\,2 + l\,5 = 2{,}3025818,$$

und demnach der Modul

$$\frac{1}{l\,.\,10} = 0{,}434\,294\,482 = \log e.$$

136. Wir setzen

$$y = x^4 - 25\,x^2 \text{ und } y + h = x^4 - 25\,x^2 + 144$$

oder

$$y = x^2\,(x + 5)\,(x - 5),$$
$$y + h = (x + 4)\,(x - 4)\,(x + 3)\,(x - 3).$$

Durch Substitution dieser Werte in Formel (3) erhalten wir

$$l(x+4) + l(x-4) + l(x+3) + l(x-3) - 2\,l\,x - l(x+5) - l(x-5)$$
$$= 2\left[\frac{72}{x^4 - 25\,x^2 + 72} + \frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4 - 25\,x^2 + 72}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{72}{x^4 - 25\,x^2 + 72}\right)^5 + \ldots\right].$$

Ist x sehr gross, so wird die rechte Seite dieser Gleichung sehr klein. Ist z. B. $x > 1000$, so wird das Glied

$$\frac{72}{x^4 - 25\,x^2 + 72} < \frac{1}{10^{10}}; \text{ denn}$$

$$\frac{72}{x^4 - 25\,x^2 + 72} < \frac{72}{x^2\,(x^2 - 25)} < \frac{72}{10^6\,(10^6 - 25)} < \frac{1}{10^{10}}\;\frac{72}{10^2 - \frac{25}{10^4}}.$$

Die anderen Glieder der Reihe werden noch viel kleiner und nehmen sehr schnell ab; nimmt man also $x = 1000$ oder gleich einer grösseren Zahl, so kann man mit einem Fehler, der kleiner als $\frac{1}{10^{10}}$ ist, setzen

$$l(x + 4) + l(x - 4) + l(x + 3) + l(x - 3) - 2\,l\,x - l(x + 5)$$
$$- l(x - 5) = 0.$$

Aus dieser Formel kann einer der darin enthaltenen Logarithmen berechnet werden, wenn die anderen bekannt sind. Es ist leicht, eine grosse Anzahl derartiger Formeln zu erhalten.

137. Hat man zwei Zahlen, die sehr gross, etwa grösser als 10 000 sind, und ist ihre Differenz gegen sie sehr klein, z. B. nicht grösser als 1, so ist dieselbe annähernd der Differenz ihrer Logarithmen proportional. Denn, brechen wir die Taylorsche Reihe bei dem ersten Gliede ab, so ist

$$l\,(1 + x) = \frac{x}{1 + \vartheta\,x}.$$

Für $x = \frac{h}{y}$ wird

$$l\,(y + h) - l\,y = \frac{h}{y + \vartheta\,h},$$

und für h = 1

$$l\,(y+1) - l\,y = \frac{1}{y+\vartheta'}.$$

Folglich ist

$$\frac{l\,(y+h) - l\,y}{l\,(y+1) - l\,y} = h\,\frac{y+\vartheta'}{y+\vartheta\,h}.$$

Da die linke Seite nur Verhältnisse von Logarithmen enthält, kann man auch in einem beliebigen Systeme schreiben

$$\frac{\log\,(y+h) - \log y}{\log\,(y+1) - \log y} = h\,\frac{y+\vartheta'}{y+\vartheta\,h},$$

weil die in zwei verschiedenen Systemen genommenen Logarithmen ein und derselben Zahlen einander proportional sind (**64**).

Nun ist

$$\frac{y+\vartheta'}{y+\vartheta\,h} < \frac{y+1}{y}, \text{ oder } < 1+\frac{1}{y},$$

dagegen

$$\frac{y+\vartheta'}{y+\vartheta h} > \frac{y}{y+1}, \text{ oder } > 1 - \frac{y}{y+1},$$

und folglich

$$\frac{y+\vartheta'}{y+\vartheta h} = 1 \pm \omega,$$

wenn $\omega < \frac{1}{y}$. Also ist

$$\frac{\log\,(y+h) - \log y}{\log\,(y+1) - \log y} = h\,(1 \pm \omega),$$

und $\log(y+h) - \log y = h\,[\log\,(y+1) - \log y] \pm \omega h [\log(y+1) - \log y]$.

Setzen wir $\log(y+h) - \log y = h\,[\log(y+1) - \log y]$, so wird demnach der begangene Fehler

$$E = \omega h\,[\log(y+1) - \log y] = \omega h \log e\,[l\,(y+1) - l\,y],$$

oder auch

$$E = \omega\,h \log e\,\frac{1}{y+\vartheta'},$$

und da

$$\omega < \frac{1}{y},\ \frac{1}{y+\vartheta'} < \frac{1}{y},\ \log e < \frac{1}{2}\text{*)},\ h < 1,$$

so ist

$$E < \frac{1}{2\,y^2} < \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10^8}, \text{ wenn } y > 10000 \text{ ist.}$$

*) Es sind die gemeinen Logarithmen genommen.

138. Andererseits hat man

$$h = \frac{\log(y+h) - \log y}{\log(y+1) - \log y} = \frac{a}{b},$$

wenn die Grösse $h\,\omega < \frac{1}{y}$ vernachlässigt wird. Ist $y > 10000$, so erhält man also h bis auf $\frac{1}{10000}$. Aber ein anderer Fehler ist möglich; da a und b nur bis auf eine Einheit bekannt sind, kann h nur bis auf $\frac{1}{100}$ erhalten werden.

Die Logarithmen als Grenzwerte algebraischer Ausdrücke betrachtet.

139. Wie wir sahen, ist für unendlich gross werdende μ

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{\mu}\right)^{\mu} \quad (58).$$

Man kann auch beweisen, dass

$$e^x = \lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{m}$$

ist, wenn m grösser als jede gegebene Grösse wird. Denn, setzen wir

$$\mu = \frac{m}{x}, \text{ so wird}$$

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}} = e + \alpha,$$

worin α verschwindet, wenn m unendlich gross wird. Also ist

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^{m} = (e + \alpha)^x.$$

Die Gleichung findet für beliebige m statt; sie gilt folglich auch noch an der Grenze, wenn $\alpha = 0$ wird. Also ist

$$e^x = \lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{m}. \qquad (1)$$

Man kann diese Gleichung auch direkt beweisen, so wie bewiesen wurde, dass $e = \lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}$ ist.

140. Setzen wir

$$e^x = y,$$

und demnach

$$x = l\,y,$$

so ist

$$y = \lim \left(1 + \frac{l\,y}{m}\right)^m,$$

und folglich

$$\lim \sqrt[m]{y} = \lim \left(1 + \frac{l\,y}{m}\right), \text{ oder } l\,y = \lim \left[m\,(\sqrt[m]{y} - 1)\right],$$

was übrigens auch direkt leicht zu beweisen ist.

Es ist $l\,(1 + x) = \frac{x}{1 + \vartheta x}$. Setzt man

$$1 + x = \sqrt[m]{y} \text{ oder } x = \sqrt[m]{y} - 1,$$

so erhält man daher

$$l\,(\sqrt[m]{y}) = \frac{l\,y}{m} = \frac{\sqrt[m]{y} - 1}{1 + \vartheta\,(\sqrt[m]{y} - 1)}$$

und folglich

$$l\,y = \frac{m\,(\sqrt[m]{y} - 1)}{1 + \vartheta\,(\sqrt[m]{y} - 1)}.$$

Ist nun m sehr gross, so ist $\sqrt[m]{y} - 1$ ein sehr kleiner Bruch, der an der Grenze Null wird; also ist

$$l\,y = \lim \left[m\,(\sqrt[m]{y} - 1)\right] \text{ für } m = \infty. \tag{2}$$

Diese Formel könnte, wenigstens in der Theorie, zur Berechnung des natürlichen Logarithmus einer Zahl dienen. Um die Rechnung ausführbar zu machen, müsste man für m eine Potenz von 2 nehmen; dann würde man $\sqrt[m]{y}$ durch successives Ausziehen der Quadratwurzeln erhalten.

141. Mittels der Formel (2) kann man $l\,(1 + u)$ in eine Reihe entwickeln. Denn setzt man

$$y = 1 + u,$$

so ist

$$m\,(\sqrt[m]{y} - 1) = m\left[(1 + u)^{\frac{1}{m}} - 1\right],$$

und wenn u absolut genommen kleiner als 1 ist, wird nach dem binomischen Satze

$$m\left[(1+u)^{\frac{1}{m}}-1\right]=u+\frac{\frac{1}{m}-1}{1\,.\,2}u^2+\frac{\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)}{1\,.\,2\,.\,3}u^3+\ldots,$$

und für $m=\infty$

$$l(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\ldots.$$

Übungen.

1. $\arcsin x = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\frac{x^7}{7}+\ldots$

2. $e^{ax}\cos nx = 1+(a^2+n^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\frac{x}{1}+(a^2+n^2)\cos 2\varphi\cdot\frac{x^2}{1\,.\,2}$

$+(a^2+n^2)^{\frac{3}{2}}\cos 3\varphi\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}+(a^2+n^2)^2\cos 4\varphi\frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}+\ldots$

$\varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{n}{a}\cdot$ Man untersuche die besonderen Fälle: $a=n=1$;

$$a=\cos\vartheta,\ n=\sin\vartheta;\ a=\frac{1}{2},\ n=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. $(\arcsin x)^2 = 2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\frac{x^6}{6}+\frac{2\,.\,4\,.\,6}{3\,.\,5\,.\,7}\frac{x^8}{8}+\ldots\right)$

Zehnte Lektion.

Die Moivresche Formel und Folgerungen aus ihr.

Allgemeine Bemerkungen über die imaginären Ausdrücke. — Moivresche Formel. Entwickelung des Sinus und Cosinus eines Vielfachen eines Bogens nach Potenzen des Sinus und Cosinus dieses Bogens. — Entwickelung einer Potenz eines Sinus oder Cosinus, nach den Sinus oder Cosinus der Vielfachen des Bogens. — Theorie der imaginären Exponentialgrössen. — Imaginäre Logarithmen.

Allgemeine Bemerkungen über die imaginären Grössen.

142. Die Auflösung der Gleichungen vom zweiten Grade, die keine reelle Wurzeln haben, führt auf Ausdrücke, die man *imaginär* nennt, und die die Form haben

$$a+b\sqrt{-1}.$$

Ihre Einführung in die Rechnung, indem man sie addiert, subtrahiert und überhaupt so verfährt, als ob $\sqrt{-1}$ ein reeller Faktor ist, dessen Quadrat -1 beträgt, hat sich als sehr vorteilhaft erwiesen.

Es ergeben sich dadurch neue imaginäre Ausdrücke und es ist nützlich, die Beziehungen zu kennen, die die reellen Teile der gegebenen und der durch ihre Kombination erhaltenen imaginären Ausdrücke zu einander haben.

Eine Gleichung, die imaginäre Ausdrücke enthält, ist der symbolische Ausdruck zweier Gleichungen zwischen reellen Grössen. So enthält die Gleichung

$$a + b\sqrt{-1} = a' + b'\sqrt{-1}$$

die beiden Gleichungen

$$a = a', \quad b = b'.$$

143. Jeder imaginäre Ausdruck $a + b\sqrt{-1}$, kann auf die Form gebracht werden $r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t)$. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin t = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

woraus

$$\operatorname{tang} t = \frac{b}{a}$$

folgt.

Die Grösse r, die immer positiv angenommen wird, heisst der *Modul* des imaginären Ausdruckes. Aus den Werten von sin t und cos t ergiebt sich arc t oder das *Argument;* gewöhnlich nimmt man es positiv und kleiner als den Kreisumfang.

Moivresche Formel.

144. Das Produkt $(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)\cdot(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)$ besteht aus dem reellen Teile

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x + y),$$

und dem mit $\sqrt{-1}$ multiplizierten

$$\sin x \cos y + \sin y \cos x = \sin(x + y).$$

Folglich ist

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)$$
$$= \cos(x + y) + \sqrt{-1}\sin(x + y),$$

und allgemein, für eine beliebige Anzahl von Faktoren,

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) (\cos y + \sqrt{-1} \sin y) (\cos z + \sqrt{-1} \sin z) \ldots$$
$$= \cos (x + y + z + \ldots) + \sqrt{-1} \sin (x + y + z + \ldots).$$

Setzt man $x = y = z$ und bezeichnet durch m eine ganze positive Zahl, so wird

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^m = \cos m x + \sqrt{-1} \sin m x. \qquad (1)$$

Dieses ist die *Moivresche Formel;* sie gilt auch, wenn m ein positiver oder negativer Bruch ist.

Entwickelung des Sinus und Cosinus eines Vielfachen eines Bogens nach Potenzen des Sinus und Cosinus dieses Bogens.

145. Wenn man die Formel (1) entwickelt und auf beiden Seiten der Gleichung die reellen und imaginären Teile gleich setzt, so wird

$$\left.\begin{aligned} \cos m x = \cos^m x - \frac{m \,.\, (m-1)}{1 \,.\, 2} \cos^{m-2} x \sin^2 x \\ + \frac{m \,.\, (m-1)(m-2)(m-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \cos^{m-4} x \sin^4 x - \ldots, \end{aligned}\right\} (2)$$

$$\sin m x = m \cos^{m-1} x \sin x - \frac{m \,.\, (m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \cos^{m-3} x \sin^3 x + \ldots (3)$$

Wir haben also $\cos m x$ und $\sin m x$ durch rationale Funktionen von $\sin x$ und $\cos x$ dargestellt. $\cos m x$ kann immer durch eine rationale Funktion von $\cos x$ allein dargestellt werden, sinus $m x$ ist aber nur, wenn m ungerade, durch eine rationale Funktion von $\sin x$ allein darzustellen.

Entwickelung einer Potenz von Sinus und Cosinus nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen des Bogens.

146. Um $\cos^m x$ und $\sin^m x$ umgekehrt nach den cosinus und sinus der Vielfachen von x zu entwickeln, setzen wir

$$u = \cos x + \sqrt{-1} \sin x, \quad v = \cos x - \sqrt{-1} \sin x;$$

wir erhalten dann

$$2 \cos x = u + v, \quad 2 \sqrt{-1} \sin x = u - v.$$

Hieraus folgt

$$2^m \cos^m x = (u + v)^m = u^m + m u^{m-1} v + \frac{m (m-1)}{1 \,.\, 2} u^{m-2} v^2 \ldots$$
$$+ \frac{m (m-1)}{1 \,.\, 2} u^2 v^{m-2} + m u v^{m-1} + \ldots.$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Ist m gerade und gleich 2 n, so enthält die Reihe eine ungerade Zahl von Gliedern und in ihrer Mitte befindet sich ein Glied

$$\frac{m \,.\, (m-1) \,.\,.\,.\, (n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\, n} u^n v^n.$$

Wenn man die gleich weit von den Enden entfernten Glieder zusammenstellt, erhält man also

$$2^m \cos^m x = u^m + v^m + m\,u\,v\,(u^{m-2} + v^{m-2}) + \ldots$$
$$+ \frac{m \,.\, m-1 \,.\,.\, (n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\, n} u^n v^n.$$

Nun ist $u^p + v^p = 2 \cos p\,x$ und $u^p v^p = 1$, weil $u\,v = 1$ ist; also wird

$$2^m \cos^m x = 2 \cos m\,x + 2m \cos (m-2)\,x + \ldots$$
$$+ \frac{m\,(m-1) \,.\,.\,.\, (n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\, n},$$

und folglich

$$2^{m-1} \cos^m x = \cos m\,x + m \cos (m-2)\,x + \frac{m\,(m-1)}{1 \,.\, 2} \cos (m-4)\,x + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{m\,(m-1) \ldots (n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\, n} \qquad (1)$$

2. Ist m ungerade und gleich 2 n + 1, so besteht die Entwickelung von $(u + v)^m$ aus einer geraden Zahl von Gliedern und man erhält leicht

$$2^{m-1} \cos^m x = \cos m\,x + m \cos (m-2)\,x + \frac{m\,(m-1)}{1 \,.\, 2} \cos (m-4)\,x + \ldots$$
$$+ \frac{m\,(m-1) \,.\,.\,.\, (n+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\,.\,.\, n} \cos x. \qquad (2)$$

147. Um $\sin^m x$ zu entwickeln, muss man die Formel

$$u - v = 2 \sqrt{-1} \sin x$$

anwenden, und beide Seiten auf die m^{te} Potenz erheben; man erhält

$$(\sqrt{-1})^m\, 2^m \sin^m x = u^m - m\,u^{m-1} v + \frac{m \,.\, (m-1)}{1 \,.\, 2} u^{m-2} v^2 \ldots$$
$$\pm \frac{m\,(m-1)}{1 \,.\, 2} u^2 v^{m-2} \mp m\,u\,v^{m-1} \pm v^m.$$

1. Ist nun erstens m gerade und gleich 2 n, so ist

$$(\sqrt{-1})^m = (-1)^n,$$

und in der Mitte der Reihe steht das Glied

$$\pm \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} u^n v^n.$$

Indem man die Glieder zu je zweien gruppiert, erhält man also

$$(-1)^n . 2^m \sin^m x = (u^m + v^m) - m u v (u^{m-2} + v^{m-2})$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{m-4} + v^{m-4}) - \ldots$$
$$\pm \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n} u^n v^n,$$

oder, da $u^k + v^k = 2 \cos kx$ und $u^k v^k = 1$ ist,

$$(-1)^n 2^{m-1} \sin^m x = \cos mx - m \cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2} \cos(m-4)x - \ldots$$
$$\pm \frac{1}{2} \frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}. \qquad (3)$$

2. Ist zweitens m ungerade und gleich $2n+1$, so ist

$$(\sqrt{-1})^m = (-1)^n \sqrt{-1},$$

und man erhält durch Zusammenfassen von je zwei Gliedern

$$(-1)^n \sqrt{-1}\, 2^m \sin^m x = (u^m - v^m) - m u v (u^{m-2} - v^{m-2})$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} u^2 v^2 (u^{m-1} - v^{m-1}) - \ldots$$
$$\pm \frac{m(m-1)\ldots(n+2)}{1.2\ldots n} u^n v^n (u - v).$$

Da nun $u^k - v^k = 2\sqrt{-1} \sin kx$ und $u^k v^k = 1$ ist, wird, wenn man beide Seiten der vorstehenden Gleichung durch $2\sqrt{-1}$ dividiert,

$$(-1)^n 2^{m-1} \sin^m x = \sin mx - m \sin(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2} \sin(m-4)x \ldots$$
$$\pm \frac{m(m-1)\ldots(n+2)}{1.2.3\ldots n} \sin x.$$

Theorie der imaginären Exponentialgrössen.

148. Für jeden reellen Wert von x ist (**126**)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Wir wollen nun in der vorstehenden Reihe $x\sqrt{-1}$ statt x setzen, und das Resultat dieser Substitution durch $e^{x\sqrt{-1}}$ bezeichnen, dann ist

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1\,.\,2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots,$$

oder

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots\ldots$$

$$+ \sqrt{-1}\left(x - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \ldots\right).$$

Folglich ist

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x. \tag{1}$$

Vertauschen wir x mit —x, so wird

$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\,\sin x. \tag{2}$$

Hieraus folgt

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \tag{3}$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \tag{4}$$

149. Sind x und y reelle Grössen, so ist

$$e^x e^y = e^{x+y}. \tag{5}$$

Dasselbe Gesetz gilt aber auch, wenn man $x\sqrt{-1}$ und $y\sqrt{-1}$ statt x und y hat. Denn setzt man in der Gleichung (1) y für x und multipliziert die rechten bezw. die linken Seiten der dadurch erhaltenen und der Gleichung (1), so wird

$$e^{x\sqrt{-1}}\,e^{y\sqrt{-1}} = \cos(x+y) + \sqrt{-1}\,\sin(x+y),$$

und demnach

$$e^{x\sqrt{-1}}\,e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}.$$

Diese Gleichung kann auch in folgender Weise bewiesen werden. Sind x und y reell, so ist

$$e^x\,e^y = e^{x+y},$$

und folglich in diesem Falle

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \ldots\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{1 \,.\, 2} + \ldots\right)$$
$$= 1 + (x + y) + \frac{(x + y)^2}{1 \,.\, 2} + \ldots \tag{6}$$

Diese Gleichung ist eine Identität; denn sie muss für beliebige reelle Werte von x und y gelten; folglich besteht diese Identität auch noch, wenn man für x und y $x\sqrt{-1}$ bezw. $y\sqrt{-1}$ setzt, und somit ist

$$e^{x\sqrt{-1}}\, e^{y\sqrt{-1}} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}.$$

150. Indem man der üblichen Bezeichnungsweise eine weitere Ausdehnung giebt, bezeichnet man mit $e^{x+y\sqrt{-1}}$ das erhaltene Resultat, wenn in der Reihe

$$1 + x + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \ldots$$

$x + y\sqrt{-1}$ an die Stelle von x gesetzt wird.

Die Formel $e^x\, e^y = e^{x+y}$ gilt auch noch, wenn die Exponenten die Form $x + y\sqrt{-1}$ haben. Denn setzt man in der identischen Gleichung (6) $y\sqrt{-1}$ statt y, so wird zunächst

$$e^x\, e^{y\sqrt{-1}} = e^{x+y\sqrt{-1}},$$

und folglich ist

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x\left(\cos y + \sqrt{-1}\,\sin y\right)$$
$$e^{u+v\sqrt{-1}} = e^u\left(\cos v + \sqrt{-1}\,\sin v\right).$$

Also ist

$$e^{x+y\sqrt{-1}} \,.\, e^{u+v\sqrt{-1}} = e^{x+u}\left[\cos(y+v) + \sqrt{-1}\,\sin(y+v)\right],$$

d. h.

$$e^{x+y\sqrt{-1}} \,.\, e^{u+v\sqrt{-1}} = e^{x+u+(y+v)\sqrt{-1}}.$$

151. Jeder imaginäre Ausdruck $a + b\sqrt{-1}$ kann auf die Form $e^{x+y\sqrt{-1}}$ gebracht werden.

Denn da

$$e^{x+y\sqrt{-1}} = e^x\left(\cos y + \sqrt{-1}\,\sin y\right)$$

ist, so genügt es für diese Transformation zu setzen

$$e^x \cos y = a,\ e^x \sin y = b,$$

woraus

$$(e^x)^2 = a^2 + b^2$$

folgt, und da e^x immer positiv ist, so ist

$$e^x = +\sqrt{a^2 + b^2}, \text{ und folglich}$$

$$x = \frac{1}{2}\, l\,(a^2 + b^2).$$

Man hat also

$$\cos y = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \sin y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Bezeichnet nun φ den kleinsten positiven Bogen, dessen Cosinus und Sinus bezw. $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ und $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ sind, und i irgend eine ganze positive oder negative Zahl, so ist

$$y = 2\, i\, \pi + \varphi.$$

Man erhält demnach

$$a + b\sqrt{-1} = e^{\frac{1}{2} l\,(a^2 + b^2) + (2\, i\, \pi + \varphi)\sqrt{-1}}. \qquad (7)$$

Dieses Resultat kann auch in folgender Weise gewonnen werden. Setzen wir

$$\varrho\,(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi) = a + b\sqrt{-1},$$

so ist

$$\varrho = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Es genügt also, dass die Gleichung besteht

$$e^x\,(\cos y + \sqrt{-1} \sin y) = \varrho\,(\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi),$$

d. h., dass

$$e^x \cos y = \varrho \cos \varphi,\ e^x \sin y = \varrho \sin \varphi$$

ist. Hieraus folgt

$$(e^x)^2 = \varrho^2,\ e^x = \varrho = +\sqrt{a^2 + b^2},$$

und folglich

$$\cos y = \cos \varphi,\ \sin y = \sin \varphi,$$

und wenn i irgend eine positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$y = 2\, i\, \pi + \varphi,$$

woraus sich wiederum die Formel (7) ergiebt.

Imaginäre Logarithmen.

152. Wenn man den imaginären Exponenten von e in der Gleichung (7) als den natürlichen Logarithmus von $a + b\sqrt{-1}$ bezeichnet, hat man

$$l\,(a + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\,l\,(a^2 + b^2) + (2\,i\,\pi + \varphi)\sqrt{-1}.$$

Nach dieser Auffassung hat jede Grösse eine unendliche Anzahl von Logarithmen, weil i alle möglichen positiven und negativen ganzen Zahlen bezeichnen kann.

Ist $b = 0$, und man bezeichnet die dann erhaltenen neuen Logarithmen mit $l(a)$, so ist

$$l(a) = l\,a + (2\,i\,\pi + \varphi)\sqrt{-1}.$$

Bezeichnet a eine positive Zahl A, so ist $\varphi = 0$ und

$$l(A) = l\,A + 2\,i\,\pi\sqrt{-1};$$

eine positive Zahl hat also einen einzigen reellen und eine unendliche Anzahl imaginärer Logarithmen.

Bezeichnet a eine negative Zahl $-$ A, so ist $\varphi = \pi$ und

$$l(-A) = l\,A + (2\,i + 1)\,\pi\sqrt{-1}.$$

Wie man sieht, hat also eine negative Grösse keinen reellen Logarithmus, weil, auch für $i = 0$, immer

$$l(-A) = l\,A + \pi\sqrt{-1}$$

ist. Für $A = 1$ wird

$$l\,(1) = 2\,i\,\pi\sqrt{-1} \text{ und } l\,(-1) = (2\,i + 1)\,\pi\sqrt{-1}.$$

Übungen.

1. Gesucht das Differential von

$$y = l\,(\cos x + \sqrt{-1}\sin x).$$

Auflösung.

$$dy = \sqrt{-1}\,dx.$$

2. Ist $f\,(z)$ eine reelle Funktion, und man setzt

$$f\,(x + y\sqrt{-1}) = P + Q\sqrt{-1},$$

so erhält man

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy},\ \frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx}.$$

3. Setzt man in der vorhergehenden Aufgabe

$$dx + dy\sqrt{-1} = \sqrt{dx^2 + dy^2}\,(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega),$$

so erhält man

$$d^n P = \frac{\frac{d^n P}{d x^n}\cos n\omega + \frac{d^n P}{d x^{n-1} d y}\sin n\omega}{\sin^n\omega} d y^n,$$

$$d^n Q = \frac{\frac{d^n P}{d x^n}\sin n\omega = \frac{d^n P}{d x^{n-1} d y}\cos n\omega}{\sin^n\omega} d y^n.$$

Elfte Lektion.

Auflösung der binomischen Gleichungen.

Auflösung der Gleichung $x^m = a$. — Satz von Cotes. — Auflösung der Gleichung $x^m = -a$, und der Gleichung $x^m = a + b\sqrt{-1}$.

Auflösung der Gleichung $x^m = a$.

153. Die Moivresche Formel kann zur Auflösung der binomischen Gleichung $x^m = \pm a$ dienen. Wir behandeln zuerst die Gleichung

$$x^m = a,$$

worin a eine reelle positive Grösse bedeutet. Dazu setzen wir

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$

und folglich

$$x^m = r^m(\cos m t + \sqrt{-1}\sin m t).$$

Zur Bestimmung von r und t hat man die Gleichung

$$r^m(\cos m t + \sqrt{-1}\sin m t) = a,$$

die in die beiden Gleichungen

$$r^m \cos m t = a,\ r^m \sin m t = 0$$

zerfällt.

Werden dieselben ins Quadrat erhoben und addiert, so erhält man zunächst

$$r^{2m} = a^2$$

und folglich

$$r = +\sqrt[m]{a},$$

worin $+\sqrt[m]{a}$ den arithmetischen Wert der m^{ten} Wurzel von a bezeichnet. Also ist

$$\sin mt = 0, \cos mt = +1,$$

und demnach

$$mt = 2i\pi, \; t = \frac{2i\pi}{m},$$

wenn i eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet.

Die Gleichung (1) ist somit durch die Formel aufgelöst:

$$x = r\left(\cos\frac{2i\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi}{m}\cdot\right)$$

154. Um alle Werte von x zu erhalten, genügt es, i die m Werte 0, 1, 2, 3, . . . , $m-1$ beizulegen. Denn ist $k < m$ eine positive ganze Zahl, und wir setzen

$$i = mq + k,$$

so ist

$$\frac{2i\pi}{m} = 2q\pi + \frac{2k\pi}{m}, \; \sin\frac{2i\pi}{m} = \sin\frac{2k\pi}{m}, \; \cos\frac{2i\pi}{m} = \cos\frac{2k\pi}{m},$$

und folglich

$$\cos\frac{2i\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2i\pi}{m} = \cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m}.$$

Die Formel

$$x = r\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m}\right)$$

ergiebt also alle Werte von x, wenn man k die Werte 0, 1, 2, 3, . . ., $m-1$ beilegt.

Die so erhaltenen m Werte sind ferner unter einander verschieden. Denn, da $k < m$ und positiv ist, so ist der Bogen $\frac{2k\pi}{m} < 2\pi$, und zwei der betrachteten Bogen können nicht gleichzeitig denselben sinus und cosinus haben.

155. Es ist nicht einmal nötig, k alle ganzen Zahlenwerte von 0 bis $m-1$ beizulegen. Denn setzen wir

$$k = m - k',$$

so wird

$$\frac{2k\pi}{m} = 2\pi - \frac{2k'\pi}{m},\ \cos\frac{2k\pi}{m} = \cos\frac{2k'\pi}{m},$$

$$\sin\frac{2k\pi}{m} = -\sin\frac{2k'\pi}{m},$$

und demnach

$$\cos\frac{2k\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m} = \cos\frac{2k'\pi}{m} - \sqrt{-1}\sin\frac{2k'\pi}{m}.$$

Wir erhalten also alle Werte von x, wenn wir

$$x = r\left(\cos\frac{2k\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{m}\right) \qquad (3)$$

setzen, und, je nachdem m gerade oder ungerade ist, k die Werte $0, 1, 2, 3, \ldots$ bis $\frac{m}{2}$ oder bis $\frac{m-1}{2}$, beilegen.

Satz von Cotes.

156. Da die vorstehende Formel alle Wurzeln der binomischen Gleichung giebt, ermöglicht sie die Zerlegung der linken Seite dieser Gleichung in reelle Faktoren vom ersten oder zweiten Grade.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Ist m gerade, so lege man k die Werte $0, 1, 2, 3, \ldots, \frac{m}{2}$ bei. Die Gleichung

$$x^m - r^m = 0$$

hat dann die Wurzeln

$$x = r$$

$$x = r\left(\cos\frac{2\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\ \sin\frac{2\pi}{m}\right)$$

$$x = r\left(\cos\frac{4\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\ \sin\frac{4\pi}{m}\right)$$

.

$$x = -r.$$

Durch Zusammenfassen der den konjugierten Wurzeln entsprechenden Faktoren erhält man also

$$x^m - r^m = \left(x^2 - r^2\right)\left(x^2 - 2r\cos\frac{2\pi}{m}.x + r^2\right)\left(x^2 - 2r\cos\frac{4\pi}{m}x + r^2\right)\ldots$$

$$\ldots\left(x^2 - 2r\cos\frac{(m-2)\pi}{m}x + r^2\right). \qquad (1)$$

2. Ist m ungerade, so ist k gleich 0, 1, 2, 3 ... $\frac{m-1}{2}$ zu setzen, und die Gleichung $x^m - r^m$ hat die Wurzeln

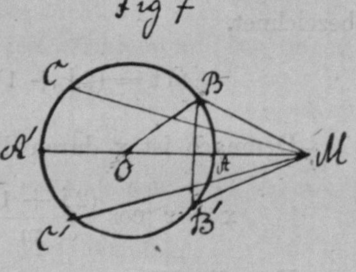
$$x = r,$$
$$x = r\left(\cos\frac{2\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m}\right),$$
$$x = r\left(\cos\frac{4\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{m}\right),$$
$$x = r\left(\cos\frac{m-1}{m}\pi \pm \sqrt{-1}\sin\frac{m-1}{m}\pi\right).$$

In diesem Falle ist

$$x^m - r^m = (x-r)\left(x^2 - 2r\cos\frac{2\pi}{m}x + r^2\right)\left(x^2 - 2r\cos\frac{4\pi}{m}x + r^2\right)\ldots$$
$$\ldots\left(x^2 - 2r\cos\frac{(m-1)\pi}{m}x + r^2\right). \quad (2)$$

Die geometrische Darstellung dieser und der vorhergehenden Formel führt auf den Satz von Cotes.

Wir beschreiben mit dem Radius r einen Kreis, ziehen einen Durchmesser AA' und teilen die Peripherie vom Punkte A aus in m gleiche Teile. Alsdann tragen wir auf dem Durchmesser AA' eine Strecke $OM = x$ ab und verbinden den Punkt M mit den einzelnen Teilpunkten. Ist MB eine der Verbindungslinien, so hat man



$$\overline{MB}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OM}^2 - 2\,OB\,.\,OM\cos BOA,$$
$$\text{oder } MB\,.\,MB' = x^2 + r^2 - 2rx\cos\frac{2\pi}{m}.$$

Ebenso ist

$$\overline{MC}\,.\,MC' = x^2 + r^2 - 2rx\cos\frac{4\pi}{m}\ldots\ldots$$

So findet man die einzelnen quadratischen Faktoren, aus denen $x^m - r^m$ besteht. Ist m gerade, so giebt es zwei reelle Faktoren ersten Grades, $x - r$ und $x + r$, die durch MA und MA' dargestellt sind, und deren Produkt den quadratischen Faktor $x^2 - r^2$

ergiebt. Ist m ungerade, so hat man nur einen reellen Faktor ersten Grades $x - r = MA$.

Hiernach drücken die Formeln (1) und (2) den von Cotes herrührenden Satz aus, dass *die Differenz der m^{ten} Potenzen der Linien OM und OA gleich dem Produkt der von M an die einzelnen Teilpunkte der Peripherie gezogenen Linien ist.*

Auflösung der Gleichung $x^m = -a$.

157. Ist die Gleichung

$$x^m = -a$$

aufzulösen, so setzen wir wiederum

$$x = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$

woraus

$x^m = r^m(\cos mt + \sqrt{-1}\sin mt)$ folgt, und haben dann zur Bestimmung von r und t die beiden Gleichungen

$$r^m \cos mt = -a, \quad r^m \sin mt = 0.$$

Hiernach ist

$$r = +\sqrt[m]{a}, \quad \sin mt = 0, \quad \cos mt = -1,$$

und folglich, wenn i eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$mt = (2i+1)\pi, \text{ oder } t = \frac{(2i+1)\pi}{m}.$$

Demnach ist x durch die Formel gegeben

$$x = r\left[\cos\frac{(2i+1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2i+1)\pi}{m}\right].$$

Um alle Werte von x zu erhalten, genügt es wie im vorhergehenden Falle **(154)** successiv $i = 0, 1, 2, 3, \ldots (m-1)$ zu setzen. Diese Werte sind ausserdem unter einander verschieden. Denn, wenn k eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots (m-1)$ bezeichnet, ist k höchstens gleich $m-1$, $2k+1$ höchstens gleich $2m-1$, und $\frac{(2k+1)\pi}{m}$ immer kleiner als π; zwei der betrachteten Bogen haben folglich nicht zugleich denselben sinus und denselben cosinus.

158. Man braucht k nicht alle ganzen Zahlenwerte von 0 bis $m-1$ beizulegen. Denn setzt man

$$k = m - 1 - k',$$

so wird

$$\cos\frac{[2\,m - (2\,k' + 1)]\,\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{[2\,m - (2\,k' + 1)]\,\pi}{m}$$

$$= \cos\frac{(2\,k' + 1)\,\pi}{m} - \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2\,k' + 1)\,\pi}{m};$$

die Formel

$$x = r\left[\cos\frac{(2\,k + 1)\,\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2\,k + 1)\,\pi}{m}\right]$$

giebt folglich alle m Werte von x, wenn k alle ganzen Zahlen bis zu der grössten, $\frac{m-1}{2}$ nicht übersteigenden durchläuft; d. h. wenn man, im Falle m gerade ist, bei $\frac{m-2}{2}$, und im Falle es ungerade ist, bei $\frac{m-1}{2}$ stehen bleibt.

159. Ebenso wie im vorhergehenden Falle kann man $x^m + r^m$ in reelle Faktoren vom zweiten Grade zerlegen und das Resultat geometrisch darstellen. Man erhält dann einen dem oben (**156**) aufgestellten analogen Satz, mit dem Unterschiede, dass die Einteilung der Peripherie in m gleiche Stücke nicht von dem Punkte A anfängt, sondern von dem Punkte, der von ersterem um den Bogen $\frac{\pi}{m}$ absteht.

Auflösung der Gleichung $x^m = a + b\sqrt{-1}$.

160. Schliesslich wollen wir noch die Gleichung

$$x^m = a + b\sqrt{-1}$$

auflösen. Wir setzen

$$a + b\sqrt{-1} = \varrho\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\,\sin\varphi),$$

$$x = r\,(\cos t + \sqrt{-1}\,\sin t)$$

und erhalten so die zwei Gleichungen

$$r^m \cos m\,t = \varrho\cos\varphi,\ r^m \sin m\,t = \varrho\sin\varphi.$$

Hieraus folgt

$$(r^m)^2 = \varrho^2, \text{ und folglich } r^m = +\,\varrho,\ r = +\sqrt[m]{\varrho},$$

wenn $+\sqrt[m]{\varrho}$ den arithmetischen Wert der m^{ten} Wurzel von ϱ bezeichnet. Also ist

$$\cos m t = \cos \varphi, \ \sin m t = \sin \varphi$$

und, wenn i eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bezeichnet,

$$m t = 2 i \pi + \varphi, \ t = \frac{2 i \pi + \varphi}{m},$$

und folglich

$$x = r \left(\cos \frac{2 i \pi + \varphi}{m} + \sqrt{-1} \sin \frac{2 i \pi + \varphi}{m}\right).$$

Wie oben lässt sich beweisen, dass, um alle m verschiedenen Werte von x zu erhalten, i nur die Zahlen 0, 1, 2, . . . m — 1 zu durchlaufen braucht.

161. Die Auflösung der Gleichung

$$x^{2m} + p x^m + q = 0$$

ist nun leicht zu erhalten; denn man kann aus ihr die beiden Gleichungen

$$x^m = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

$$x^m = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

ableiten, die unter einen der oben betrachteten Fälle gehören.

Zwölfte Lektion.

Vieldeutige Ausdrücke.

Wahrer Wert der Ausdrücke, die in einer der Formen $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$, 0^0, 1^∞ dargestellt sind. — Erweiterung der vorhergehenden Regeln. — Anwendungen.

Wahrer Wert der Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$.

162. Es sei $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ ein Bruch, der für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Wir wollen nun den Grenzwert bestimmen, dem sich

derselbe nähert, wenn x von dem besonderen Werte a unendlich wenig verschieden wird. Diesen Grenzwert von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ nennt man häufig den wahren Wert des Bruches der in der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ auftritt. Da $\varphi(a) = 0$, und $f(a) = 0$ ist, hat man identisch

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{f(x) - f(a)}, \text{ oder } \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}}{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}.$$

Nähert sich nun x dem Grenzwerte a, so nähern sich $\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}$ und $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ nach der Definition bezw. $\varphi'(a)$ und $f'(a)$; also ist

$$\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi'(a)}{f'(a)}, \text{ oder } \lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}$$

Man erhält dieses Resultat auch mittels der Taylorschen Reihe. Setzen wir in No. **122** Formel (11) $x = a + h$ und nehmen an, dass $f^{(n+1)}(a)$ und $\varphi^{(n+1)}(a)$ die ersten Ableitungen sind, die für $x = a$ nicht gleichzeitig Null werden, so erhalten wir

$$\varphi(a + h) = \frac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n + 1)} \varphi^{(n+1)}(a + \vartheta h)$$

$$f(a + h) = \frac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n + 1)} f^{(n+1)}(a + \vartheta' h),$$

und folglich

$$\frac{\varphi(a + h)}{f(a + h)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(a + \vartheta h)}{f^{(n+1)}(a + \vartheta' h)}.$$

Hiernach ist, für $h = 0$,

$$\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(a)}{f^{(n+1)}(a)}.$$

163. Beispiele.

1. Der Ausdruck $\frac{x^m - a^m}{x - a}$ nimmt für $x = a$ die Form $\frac{0}{0}$ an. Die Ableitung von $x^m - a^m$ ist nun aber $m x^{m-1}$ und die von $x - a$ ist 1; der wahre Wert des Quotienten $\frac{x^m - a^m}{x - a}$ ist also für $x = a$ und für beliebige m gleich $m a^{m-1}$.

2. Durch Anwendung derselben Regel findet man für $x = a$ den wahren Wert des Bruches $\frac{x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3}{x^2 - a^2}$ gleich Null.

Dasselbe ergiebt sich auch auf einem anderen Wege; denn es ist

$$\frac{x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3}{x^2 - a^2} = \frac{(x-a)^2(x-2a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{(x-a)(x-2a)}{x+a}$$

und der letzte Ausdruck wird Null für $x = a$.

3. Die Funktion $\frac{\sin x}{x}$ hat für $x = 0$ die Form $\frac{0}{0}$; aber die Ableitung von $\sin x$ ist $\cos x$ und die von x ist 1; der Grenzwert von $\frac{\sin x}{x}$ für $x = 0$ ist also 1.

Man darf aber dieses Resultat nur als eine Bestätigung und nicht als einen Beweis auffassen, denn die Ableitung von $\sin x$ haben wir nur unter Voraussetzung des Satzes erhalten, dass für $x = 0$ $\lim \frac{\sin x}{x} = 1$ ist.

4. Ebenso findet man für $x = 0$ $\lim \frac{\sin^2 x}{x} = 0$.

Zu diesem Resultate gelangt man auch auf dem folgenden Wege. Es ist

$$\lim \frac{\sin^2 x}{x} = \lim \frac{\sin x}{x} . \lim \sin x = 1 . 0 = 0.$$

In gleicher Weise erhält man

$$\lim \frac{\operatorname{tang} x}{x} = \lim \frac{\sin x}{x} \cdot \lim \frac{1}{\cos x} = 1 . 1 = 1 .$$

5. Gesucht wird der Grenzwert des Quotienten $\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ für $x = 0$.

Man erhält successiv

$$\frac{\varphi'(x)}{f'(x)} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}, \text{ für } x = 0;$$

$$\frac{\varphi''(x)}{f''(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{0}{0}, \text{ für } x = 0;$$

$$\frac{\varphi'''(x)}{f'''(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2, \text{ für } x = 0.$$

Der gesuchte Grenzwert ist also 2. Dasselbe Resultat lässt sich gewinnen, indem wir für e^x, e^{-x} und sin x ihre bezüglichen Reihen setzen. Es ist

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots,$$

und daher

$$e^x - e^{-x} - 2x = 2\left(\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots\right)$$

$$x - \sin x = \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$$

Folglich wird

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{2\left(\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots\right)}{\frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots}$$

Dividieren wir auf der rechten Seite dieser Gleichung den Zähler und Nenner durch x^3 und setzen dann $x = 0$, so wird

$$\lim \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2.$$

6. $\lim \frac{x^2 - x}{1 - x + l x} = -2$, für $x = 2$;

7. $\lim \frac{l x}{x - 1} = 1$, für $x = 1$.

Wert der Ausdrücke von der Form $\frac{\infty}{\infty}$.

164. Angenommen der Quotient $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ nehme für $x = a$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$ an, so ist der Wert von $\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ zu bestimmen. Man hat identisch

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}.$$

Nun sind, für $x = a$, $\frac{1}{f(x)}$ und $\frac{1}{\varphi(x)}$ Null; der wahre Wert dieses Ausdruckes ist also der Grenzwert des Quotienten der Ableitungen von $\frac{1}{f(x)}$ und $\frac{1}{\varphi(x)}$, und man erhält

$$\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{-\frac{f'(x)}{f(x)^2}}{-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}} = \lim \left[\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \cdot \frac{\varphi(x)}{f(x)} \cdot \frac{(\varphi x)}{f(x)}\right],$$

oder, wenn A den Grenzwert von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ bezeichnet

$$A = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \cdot A^2,$$

und folglich

$$A \text{ oder } \lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}.$$

Man gelangt also wiederum zu der Regel, die für den Fall ermittelt wurde, dass der Ausdruck die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Bezeichnet demnach $n + 1$ die Ordnung der ersten Ableitungen von $\varphi(x)$ und $f(x)$, die nicht gleichzeitig Null oder unendlich werden, so hat man

$$\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi^{(n+1)}(a)}{f^{(n+1)}(a)}.$$

165. Der vorstehende Beweis setzt voraus, dass A, d. h. der Grenzwert von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ endlich und von Null verschieden ist; er behält aber auch Geltung für $A = 0$. Denn bezeichnet g eine Constante, so wird der Ausdruck

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} + g \text{ oder } \frac{\varphi(x) + g\,f(x)}{f(x)}$$

für $x = a$ ebenfalls $\frac{\infty}{\infty}$, aber sein wahrer Wert ist g; da A oder $\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ Null ist. Folglich ist nach dem soeben Bewiesenen

$$g = \frac{\varphi'(a) + g f'(a)}{f'(a)} = g + \frac{\varphi'(a)}{f'(a)},$$

und daher

$$\frac{\varphi'(a)}{f'(a)} = 0 = A.$$

Also auch in diesem Falle führt die Anwendung der allgemeinen Regel auf den wahren Werte des Ausdruckes. Hieraus folgt, dass sie auch für $A = \infty$ auf ihn führen würde, denn ist $\frac{\varphi(a)}{f(a)} = \infty$, so hat man $\frac{f(a)}{\varphi(a)} = 0$, und folglich $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)} = 0$ oder $\frac{\varphi'(a)}{f'(a)} = \infty$.

Wert der Ausdrücke von der Form 0 · ∞.

166. Um den Wert des Produktes $\varphi(a)\, f(a)$ zu bestimmen, wenn $\varphi(a) = 0$ und $f(a) = \infty$ ist, beachte man, dass

$$\varphi(x)\, f(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

ist, und dieser Ausdruck wird $\frac{0}{0}$ für $x = a$. Man kann auch setzen

$$\varphi(x)\, f(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}},$$

wodurch man für $x = a$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$ erhält.

In beiden Fällen sind die obigen Regeln anzuwenden; man findet so

$$\lim \left[(1 - x) \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2}\right] = \frac{2}{\pi}, \text{ für } x = 1.$$

167. Führen die Ableitungen von $\varphi(x)$ und $f(x)$ immer auf Ausdrücke, die für $x = a$ mit derselben Vieldeutigkeit behaftet sind wie der, dessen wahren Wert man ermitteln will, so muss man besondere Kunstgriffe anwenden. Am häufigsten gelangt man zum Ziele, indem man x durch $a + h$ ersetzt, die Funktionen nach der Taylorschen Reihe entwickelt, alle möglichen Reduktionen und Vereinfachungen ausführt, und schliesslich $h = 0$ setzt. So wird

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \tag{1}$$

für $x = a$ $\frac{0}{0}$. Der Quotient der Ableitungen

$$\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-a}}}{\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}$$

wird $\frac{\infty}{\infty}$, und auch die folgenden Ableitungen ergeben immer wieder $\frac{\infty}{\infty}$. Um den Wert des Ausdruckes (1) zu bestimmen, setzen wir daher $x = a + h$, wodurch wir den Ausdruck

$$\frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a} + \sqrt{h}}{\sqrt{h}\,\sqrt{2a+h}}$$

erhalten. Multipliziert man Zähler und Nenner dieses Quotienten mit $\sqrt{a+h} + \sqrt{a}$, so nimmt er die Gestalt an

$$\frac{h + \sqrt{h}\,(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{\sqrt{h}\,\sqrt{2a+h}\,(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})},$$

und nach Division seines Zählers und Nenners mit $\sqrt{h}$ wird er

$$\frac{\sqrt{h} + \sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{2a+h}\,(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}.$$

Dieser Ausdruck wird für $h = 0$ gleich

$$\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{a}\,\sqrt{2a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Dasselbe Resultat konnte auch durch Entwickelung von $\sqrt{a+h}$ nach dem binomischen Satze erhalten werden.

Wert der Ausdrücke von der Form 0^0 oder 1^∞.

168. Der Ausdruck $f(x)^{\varphi(x)}$ nimmt eine unbestimmte Form an, wenn die Funktionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ für $x = a$ beide Null werden. Seinen wahren Wert erhält man aus dem wahren Werte seines Logarithmus $\varphi(x)\, l\, f(x)$.

Es sei z. B. für $x = \infty$ der Grenzwert von $f(x)^{\frac{1}{x}}$ zu bestimmen. Der natürliche Logarithmus dieser Funktion ist $\frac{l\, f(x)}{x}$ und sein Grenzwert ist der von $\frac{f'(x)}{f(x)}$; also hat man

$$\lim f(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim \frac{f'(x)}{f(x)}}.$$

Ebenso ist der wahre Wert eines Ausdruckes von der Form 1^{∞} aus dem wahren Werte seines Logarithmus abzuleiten, der die Form $\infty \cdot 0$ annimmt.

Erweiterung der vorhergehenden Regeln.

169. Die Regeln, die zur Bestimmung des wahren Wertes der für $x = a$ vieldeutigen Ausdrücke dienen, bestehen auch noch, wenn a unendlich wird, weil sie für beliebig grosse a gelten; aber der Beweis kann dann nicht mehr in derselben Weise geführt werden. Im Falle eines Ausdruckes, der für $x = \infty$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, gelangen wir unmittelbar zu ihnen. Wir setzen dazu $x = \frac{1}{y}$, so ist

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{y}\right),\; f(x) = f\left(\frac{1}{y}\right),$$

und folglich

$$\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)}.$$

Nun ist, für $x = \infty$, $y = 0$; also wird

$$\lim \frac{\varphi\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim \frac{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{f'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)},$$

oder auch

$$\lim \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim \frac{\varphi'\left(\frac{1}{y}\right)}{f'\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}.$$

Vor Anwendung der Regeln ist aber zu untersuchen, ob der gegebene Ausdruck ebenso wie $\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}$ für $x = \infty$ sich einem Grenzwerte nähert. So hat z. B. der Ausdruck

$$\frac{x + \cos x}{x - \sin x} = \frac{1 + \frac{\cos x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}}$$

für $x = \infty$ die 1 zur Grenze, während der Quotient der Ableitungen $\frac{1 - \sin x}{1 - \cos x}$ für $x = \infty$ vollständig unbestimmt ist

Übungen.

1. $\lim x^n e^{-x} = \lim \frac{1.2.3\ldots n}{e^x} = 0$, für $x = \infty$; dieser Grenzwert bleibt auch, wenn n ein Bruch ist, Null, wie man durch Entwickelung von e^x in eine Reihe erkennt.

2. $\lim x^{\frac{1}{x}} = 1$, für $x = \infty$.

3. $\lim (A x^m + B x^{m-1} + \ldots U)^{\frac{1}{x}} = 1$, für $x = \infty$

4. $\lim (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, für $x = 0$.

5. $\frac{a^x - b^x}{x} = l\,a - l\,b$, für $x = 0$.

Dreizehnte Lektion.

Entwickelung der Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Ausdehnung des Taylorschen Satzes auf Funktionen mehrerer Veränderlicher. — Ausdehnung des Maclaurinschen Satzes. — Eigenschaften der homogenen Funktionen.

Ausdehnung des Taylorschen Satzes.

170. Es sei $u = f(x, y)$ eine Funktion von zwei Veränderlichen. Um nun $f(x + h, y + k)$ nach Potenzen von h und k zu entwickeln, ändert man zunächst x in $x + h\,t$, y in $y + k\,t$, entwickelt mittels der Maclaurinschen Formel $f(x + h\,t, y + k\,t)$ nach steigenden Potenzen von t und setzt dann $t = 1$.

Ist also $f(x + h\,t, y + k\,t) = \varphi(t) = U$
und wir setzen zur Vereinfachung

$$x + h\,t = p, \quad y + k\,t = q,$$

so wird

$$U = \varphi(t) = f(p, q).$$

Nun ist nach der Maclaurinschen Formel

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{1.2}\varphi''(0) + \ldots + \frac{t^n}{1.2.3\ldots n}\varphi^{(n)}(0) + R,$$

und

$$R = \frac{t^n}{1.2.3\ldots n}\left[\varphi^{(n)}(\vartheta t) - \varphi^{(n)}(0)\right].$$

Da aber

$$\varphi(t) = U, \text{ so ist}$$

$$\varphi'(t)\,dt = \frac{dU}{dp}dp + \frac{dU}{dq}dq = \left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k\right)dt,$$

und da $dp = h\,dt$, $dq = k\,dt$, ist

$$\varphi'(t) = \frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k.$$

Bezeichnet man $\varphi'(t)$ durch U', so ist U' ebenfalls eine Funktion von p und q und man erhält

$$\varphi''(t) = \frac{dU'}{dp}h + \frac{dU'}{dq}k = \frac{d^2U}{dp^2}h^2 + 2\frac{d^2U}{dp\,dq}hk + \frac{d^2U}{dq^2}k^2.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber nichts anderes als die Entwickelung von $\left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k\right)^2$, wenn man d^2U statt dU^2 setzt; wir können daher die symbolische Formel aufstellen

$$\varphi''(t) = \left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k\right)^{(2)}.$$

Ebenso ist

$$\varphi'''(t) = \left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}.k\right)^{(3)},$$

und allgemein

$$\varphi^{(n)}(t) = \left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}.k\right)^{(n)}.$$

Man beweist dieses leicht, indem man (wie bei den totalen Differentialen der Funktionen mehrerer Veränderlicher) zeigt, dass jede neue Differentiation erhalten wird, wenn man jedes Glied der symbolischen Formel mit $\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k$ multipliziert, und in der Entwickelung an Stelle der Exponenten von dU die Indices der Differentiation setzt.

Man hat also allgemein

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{d^n U}{d p^n} h^n + n \frac{d^n U}{d p^{n-1} d q} h^{n-1} k + \frac{n(n-1)}{1 \,.\, 2} \frac{d^n U}{d p^{n-2} d q^2} h^{n-2} k^2$$

$$+ \ldots + n \frac{d^n U}{d p \, d q^{n-1}} h k^{n-1} + \frac{d^n U}{d q^n} k^n.$$

171. Da nun $u = f(x, y)$, $U = f(p, q)$, $p = x + h t$, $q = y + k t$ ist, so wird, für $t = o$, $p = x$, $q = y$, $U = u$, und man hat

$$\varphi(0) = f(x, y) = u$$

$$\varphi'(0) = \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k;$$

$$\varphi''(0) = \left(\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k\right)^{(2)};$$

.

$$\varphi^{(n)}(0) = \left(\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k\right)^{(n)}.$$

Setzt man ferner $t = 1$, so wird

$$R = \frac{1}{1.2.3\ldots n} [\varphi^{(n)}(\vartheta) \,.\, - \varphi^{(n)}(0)].$$

Also ist

$$f(x+h, y+k) = u + \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{1}{1.2} \left(\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k\right)^{(2)}$$

$$+ \frac{1}{1.2.3} \left(\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k\right)^{(3)} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{1.2\ldots n} \left(\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k\right)^{(n)} + R. \qquad (1)$$

Ausserdem ist

$$R = \frac{1}{1.2\ldots n} \left[\left(\frac{dU}{dp} h + \frac{dU}{dq} k\right)^{(n)} - \left(\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k\right)^{(n)}\right],$$

worin p durch $x + \vartheta h$ und q durch $y + \vartheta k$ zu ersetzen sind.

172. Da h und k die willkürlichen Änderungen der unabhängigen Veränderlichen x und y sind, kann man sie durch dx und dy ersetzen, wodurch $\varphi'(0)$ in du, $\varphi''(0)$ in $d^2 u$ u. s. w. übergehen, und man erhält

$$f(x+h, y+k) = u + du + \frac{d^2 u}{1.2} + \frac{d^3 u}{1.2.3} + \ldots + \frac{d^n u}{1.2\ldots n} + R.$$

In derselben Weise erhält man

$$f(x+h, y+k, z+l, \ldots) = u + du + \frac{d^2u}{1.2} + \ldots + \frac{d^n u}{1.2\ldots n} + R, \quad (2)$$

worin

$$R = \frac{1}{1.2\ldots n}\left[\left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k + \frac{dU}{dr}l + \ldots\right)^{(n)} - \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l + \ldots\right)^{(n)}\right].$$

ist.

In dieser symbolischen Formel ist

$u = f(x, y, z \ldots)$ $U = f(p, q, r \ldots)$, $p = x + \vartheta h$, $q = y + \vartheta k$, $r = z + \vartheta l$, und ϑ ein positiver Bruch.

Wenn der Rest R für genügend grosse n kleiner als jede gegebene Grösse werden kann, so konvergiert die auf der rechten Seite der Gleichung (2) stehende unendliche Reihe und ihre Summe ist $f(x + h, y + k, z + l, \ldots)$. Sie stellt die auf eine beliebige Anzahl Veränderlicher ausgedehnte Taylorsche Reihe dar.

173. So wie bei den Funktionen einer Veränderlichen kann man auch hier zeigen, dass für hinlänglich kleine h und k ein beliebiges Glied der Reihe, wenn es nicht Null ist, seinem absoluten Betrage nach grösser als deren Rest, von diesem Gliede an gerechnet, sein muss.

Wir betrachten z. B. in der Reihe (1) das Glied

$$T_{n+1} = \frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^n u}{dx^n}h^n + n\frac{d^n u}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k + \ldots + \frac{d^n u}{dy^n}k^n\right).$$

Dividiert man die Ausdrücke für R und T_{n+1} durch h^n, so ist

$$\frac{R}{T_{n+1}} = \frac{\frac{d^n U}{dp^n} - \frac{d^n u}{dx^n} + n\left(\frac{d^n U}{dp^{n-1}dq} - \frac{d^n u}{dx^{n-1}dy}\right)\frac{k}{h} + \ldots}{\frac{d^n u}{dx^n} + n\frac{d^n u}{dx^{n-1}dy}\frac{k}{h} + \ldots}$$

Nun geht für $h = 0$ und $k = 0$ $\frac{d^n U}{dp^a\,dq^{n-a}}$ in $\frac{d^n u}{dx^a\,dy^{n-a}}$ über; also kann der Zähler für genügend kleine h und k kleiner als jede gegebene Grösse werden: denn jede einzelne der Gruppen von Gliedern, woraus er besteht, nähert sich der Null, während der Nenner einen von Null verschiedenen Grenzwert hat, folglich u. s. w.

Ausdehnung des Maclaurinschen Satzes.

174. Wir setzen jetzt in der Entwickelung von $f(x+h, y+k)$ (No. **171**) $x=0$, $y=0$, und bezeichnen durch u_0, $\left(\frac{du}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{du}{dy}\right)_0, \dots$ die Werte, die u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$ für $x=0$, $y=0$ annehmen.

Wir haben alsdann

$$f(h,k) = u_0 + \left(\frac{du}{dx}\right)_0 h + \left(\frac{du}{dy}\right)_0 k$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)_0 h + \left(\frac{du}{dy}\right)_0 . k\right] + \dots + R. \qquad (2)$$

Werden h und k bezw. durch x und y ersetzt, so nimmt diese Formel die Gestalt an

$$f(x,y) = u_0 + \left(\frac{du}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{du}{dy}\right)_0 y$$
$$+ \frac{1}{1.2}\left[\left(\frac{du}{dx}\right)_0 x + \left(\frac{du}{dy}\right)_0 y\right]^{(2)} + \dots + R, \qquad (3)$$

und es ist

$$R = \frac{1}{1.2.3\dots n}\left[\left(\frac{dU}{dp}h + \frac{dU}{dq}k\right)^{(n)} - \left(\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k\right)_0^{(n)}\right],$$

worin $x=0$, $y=0$ zu setzen, und h durch x, k durch y, p durch ϑx, q durch ϑy zu ersetzen sind. Wenn, für wachsende n, R sich der Null nähert, giebt die rechte Seite der Formel (3) eine konvergente Reihe, deren Summe $f(x, y)$ ist. Dieses ist die auf Funktionen zweier Veränderlicher ausgedehnte Maclaurinsche Reihe. In gleicher Weise könnte man sie auch auf Funktionen von einer beliebigen Anzahl Veränderlicher ausdehnen.

Homogene Funktionen.

175. Eine Funktion heisst *homogen*, wenn der Wert, der durch Multiplikation ihrer Veränderlichen mit ein und demselben Faktor erhalten wird, gleich dem ursprünglichen Werte der Funktion, multipliziert mit einer gewissen Potenz dieses Faktors, ist. So ist $f(x, y, z)$ eine homogene Funktion, wenn

$$f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z)$$

ist; m heisst der Grad der Funktion.

176. *Teilt man eine homogene Funktion m^{ten} Grades durch die m^{te} Potenz einer ihrer Veränderlichen, so hängt die Funktion nur*

noch von den Verhältnissen zwischen dieser und den anderen Veränderlichen ab.

Denn setzen wir $t\,x = 1$, so wird $t = \frac{1}{x}$, und aus

$$f(t\,x,\ t\,y,\ t\,z) = t^m f(x,\ y,\ z)$$

erhalten wir die Gleichung

$$f\left(1,\ \frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right) = \frac{f(x,\ y,\ z)}{x^m}.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist *umgekehrt* die Funktion homogen. Denn, ist

$$f(x,\ y,\ z) = x^m \varphi\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right),$$

so ist auch

$$f(t\,x,\ t\,y,\ t\,z) = t^m x^m \varphi\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}\right),$$

und durch Elimination der Funktion φ erhält man

$$f(t\,x,\ t\,y,\ t\,z) = t^m f(x,\ y,\ z),$$

was beweist, dass die Funktion $f(x,\ y,\ z)$ homogen ist.

177. *Ist $f(x, y, z)$ irgend eine homogene Funktion m^{ten} Grades, so sind ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung homogene Funktionen $(m-1)^{ten}$ Grades.*

Es sei $\frac{d\,f(x, y, z)}{d\,x} = \varphi(x, y, z)$. Man hat (**175**)

$$f(t\,x,\ t\,y,\ t\,z) = t^m f(x,\ y,\ z),$$

und folglich, wenn man beiderseits die Ableitungen nach x nimmt,

$$\varphi(t\,x,\ t\,y,\ t\,z)\,t = t^m \varphi(x,\ y,\ z),$$

oder

$$\varphi(t\,x,\ t\,y,\ t\,z) = t^{m-1} \varphi(x,\ y,\ z).$$

Also ist (**176**) $\varphi(x,\ y,\ z)$ oder $\frac{d\,f(x,\ y,\ z)}{d\,x}$ eine homogene Funktion vom $(m-1)^{ten}$ Grade.

178. Für jede homogene Funktion gilt (**175**)

$$f(t\,x,\ t\,y,\ t\,z) = t^m f(x,\ y,\ z).$$

Setzen wir nun

$$t = 1 + \alpha$$

und bezeichnen $f(x,\ y,\ z)$ durch u, so wird

$$f(x + \alpha x,\ y + \alpha y,\ z + \alpha z) = (1 + \alpha)^m u. \qquad \text{(a)}$$

Durch Anwendung des auf die Funktionen mehrerer Veränderlicher ausgedehnten Taylorschen Satzes (**172**) erhalten wir ferner

$$f(x+\alpha x,\ y+\alpha y,\ z+\alpha z)=u+\alpha\left(\frac{du}{dx}x+\frac{du}{dy}y+\frac{du}{dz}z\right)$$
$$+\frac{\alpha^2}{1.2}\left(\frac{du}{dx}x+\frac{du}{dy}y+\frac{du}{dz}z\right)^{(2)}+\ldots$$

Andererseits ist nach dem binomischen Satze

$$(1+\alpha)^m u=u+m u\alpha+\frac{m(m-1)}{1.2}u\alpha^2+\ldots,$$

und da die Gleichung (a) identisch gilt, so ist

$$\frac{du}{dx}x+\frac{du}{dy}y+\frac{du}{dz}z=mu \qquad (1)$$
$$\left(\frac{du}{dx}x+\frac{du}{dy}y+\frac{du}{dz}z\right)^{(2)}=m(m-1)u, \qquad (2)$$
$$\left(\frac{du}{dx}x+\frac{du}{dy}y+\frac{du}{dz}z\right)^{(3)}=m(m-1)(m-2)u \qquad (3)$$

. .

Die Gleichung (1) ist besonders wichtig; sie zeigt, dass *die Summe der partiellen mit den bezüglichen Veränderlichen multiplizierten Ableitungen einer homogenen Funktion gleich der mit ihrem Grade multiplizierten Funktion ist.*

179. Beispiel.

$$u=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy.$$

Man hat

$$\frac{du}{dx}=2Ax+2Ez+2Fy,$$
$$\frac{du}{dy}=2By+2Dz+2Fx,$$
$$\frac{du}{dz}=2Cz+2Dy+2Ex,$$

und folglich

$$x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}+z\frac{du}{dz}$$
$$=2(Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Exz+2Fxy)=2u.$$

180. Die Identität (1) kann in folgender Weise direkt erhalten werden.

Setzen wir $tx=p$, $ty=q$, $tz=r$,

so wird

$$f(p, q, r) = t^m f(x, y, z),$$

und wenn wir beiderseits die Ableitungen nach t nehmen,

$$\frac{d f(p, q, r)}{d p} x + \frac{d f(p, q, r)}{d q} y + \frac{d f(p, q, r)}{d r} z = m t^{m-1} f(x, y, z).$$

Diese Identität gilt für alle Werte von t; ist nun t = 1, so werden

$$\frac{d f(p, q, r)}{d p}, \frac{d f(p, q, r)}{d q}, \frac{d f(p, q, r)}{d r}$$

bezw. gleich

$$\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz};$$

also ist

$$x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + z \frac{du}{dz} = m u. \qquad (1)$$

181. Um direkt die Gleichung (2) zu beweisen, muss man die Gleichung (1) nach x, y und z differenzieren, man erhält

$$x \frac{d^2u}{dx^2} + y \frac{d^2u}{dx\,dy} + z \frac{d^2u}{dz\,dx} + \frac{du}{dx} = m \frac{du}{dx}$$

$$x \frac{d^2u}{dx\,dy} + y \frac{d^2u}{dy^2} + z \frac{d^2u}{dy\,dz} + \frac{du}{dy} = m \frac{du}{dy}$$

$$x \frac{d^2u}{dx\,dz} + y \frac{d^2u}{dy\,dz} + z \frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz} = m \frac{du}{dz}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen beziehungsweise mit x, y, z, addieren sie dann und subtrahieren von der resultierenden Gleichung beiderseits den Ausdruck

$$\frac{du}{dx} x + \frac{du}{dy} y + \frac{du}{dz} z,$$

so wird

$$\left(\frac{du}{dx} x + \frac{du}{dy} y + \frac{du}{dz} z\right)^{(2)} = m(m-1) u.$$

In derselben Weise könnte man die Gleichungen (3), (4) u. ff. (**178**) erhalten.

Vierzehnte Lektion.

Maxima und Minima der Funktionen einer Veränderlichen.

Maxima und Minima der Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen. — Anwendungen. — Maxima und Minima unentwickelter Funktionen.

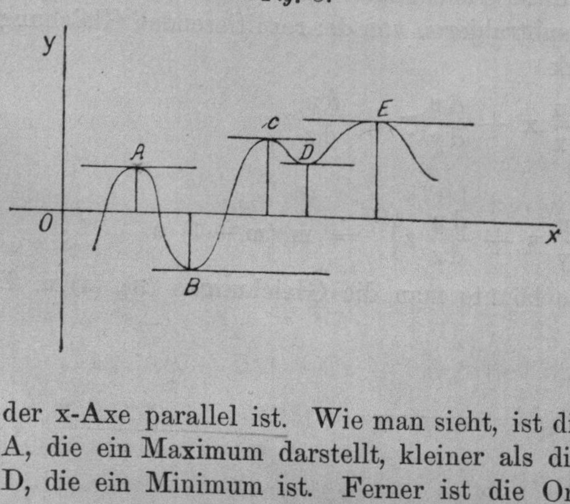
Maxima und Minima der Funktionen einer unabhängen Veränderlichen.

182. Es sei f (x) eine Funktion einer einzigen Veränderlichen x. Nimmt die Funktion, wenn x wächst, einen Wert an, der grösser ist als die ihm unmittelbar benachbarten vorhergehenden oder folgenden Werte, so nennt man diesen ein *Maximum*. Einen Wert, der kleiner als die ihm benachbarten ist, nennt man ein *Minimum*.

Wird f (x) für $x = a$ ein Maximum, so ist die Differenz $f(a+h) - f(a)$ *negativ*, wenn h genügend klein ist, gleichgültig, welches Vorzeichen es hat. Ist dagegen f (a) ein Minimum, so muss diese Differenz *positiv* sein.

183. Eine Funktion kann mehrere Maxima und Minima haben, die abwechselnd aufeinander folgen müssen. Ein Maximum kann kleiner als ein Minimum sein. Ein negatives Maximum wird ein Minimum, wenn man von seinem Vorzeichen absieht, und ebenso wird ein negatives Minimum, positiv genommen, ein Maximum.

Fig. 8.



Diese einzelnen aus der Definition sich ergebenden Folgerungen werden durch die Betrachtung der Kurve A B C D E deutlich. Ist $y = f(x)$ die Gleichung dieser Kurve, so sind die Maxima und Minima von f (x) offenbar die Ordinaten der Punkte A, B u. s. w., in denen die Tangente der x-Axe parallel ist. Wie man sieht, ist die Ordinate des Punktes A, die ein Maximum darstellt, kleiner als die Ordinate des Punktes D, die ein Minimum ist. Ferner ist die Ordinate von B, absolut

genommen, ein Maximum, dagegen ein Minimum, wenn ihr Vorzeichen berücksichtigt wird.

184. Bekanntlich wächst die Funktion f (x) beständig, wenn für zunehmende x die Ableitung f' (x) stets positiv ist; dagegen nimmt f (x) ab, wenn f' (x) negativ ist. Die Funktion f (x) wird also weder ein Maximum noch ein Minimum, solange für wachsende x, f' (x) dasselbe Vorzeichen beibehält. Ändert dagegen die Ableitung ihr Vorzeichen, wenn x einen gewissen Wert a erreicht und überschreitet; so wird die Funktion f (x) für diesen Wert ein *Maximum*, wenn die Ableitung aus dem *Positiven* in das *Negative*, und ein *Minimum*, wenn sie aus dem *Negativen* in das *Positive* übergeht. Die Ableitung kann nun aber ihr Vorzeichen nur ändern, ndem sie durch die Null hindurchgeht, oder indem sie unstetig oder unendlich wird. Also wird f (x) nur für diejenigen Werte von x ein Maximum oder Minimum, für die die Ableitung f' (x), indem sie ihr Vorzeichen ändert, Null, unendlich oder unstetig wird.

185. Gewöhnlich entsprechen die Maxima und Minima Werten von x, für die die Ableitung ihr Vorzeichen ändert, indem sie Null wird und endlich und stetig bleibt. In diesem Falle lassen sich die Bedingungen der Maxima und Minima mittels der Taylorschen Reihe feststellen. Man hat zunächst

$$f(x+h) - f(x) = h f'(x) + R.$$

Wenn f' (x) von Null verschieden ist, hat die Differenz f (x + h) — f (x) dasselbe Vorzeichen wie h f' (x). Diese Differenz ändert also mit h ihr Vorzeichen und f (x) ist in diesem Falle weder ein Maximum noch ein Minimum. Ist dagegen f' (x) Null und f'' (x) von Null verschieden, so hat man

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h^2}{1.2} f''(x) + R,$$

und die Differenz f (x + h) — f (x) hat alsdann für positive und negative h dasselbe Vorzeichen wie f'' (x). Ist also für den betrachteten Wert von x, durch den f' (x) verschwindet, f'' (x) positiv, so ist f (x) ein Minimum, und ist f'' (x) negativ, so ist f (x) ein Maximum.

Ist aber f'' (x) ebenfalls Null, so hat man

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + R,$$

und wenn f''' (x) von Null verschieden ist, ändert f (x + h) — f (x) mit h sein Vorzeichen. Also ist dann f (x) weder ein Maximum noch ein Minimum.

Ist auch $f'''(x) = 0$, so ist

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h^4}{1.2.3.4} f''''(x) + R,$$

und f (x) wird ein Minimum oder Maximum je nachdem $f''''(x)$ für den betrachteten Wert von x, durch den $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ verschwinden, positiv oder negativ ist, u. s. f.

186. Hiernach erhalten wir folgenden allgemeinen Satz: *Wenn für einen Wert von x einzelne der successiven Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$, ... Null werden, und die erste nicht verschwindende Ableitung von gerader Ordnung ist, so wird die Funktion f (x) ein Minimum oder ein Maximum, je nachdem diese Ableitung positiv oder negativ ist; ist dagegen die erste nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung, so findet weder ein Maximum noch ein Minimum statt.*

Diese Regel stimmt mit der oben (**184**) gegebenen überein; denn werden z. B. die drei ersten Ableitungen Null, und man wendet die Taylorsche Reihe auf die Ableitung an, so erhält man

$$f'(x+h) = \frac{h^3}{1.2.3} f''''(x) + R'.$$

Wie man sieht, ändert $f'(x)$ sein Vorzeichen mit h; dagegen würde $f'(x)$ sein Vorzeichen nicht mit h ändern, wenn die erste nicht verschwindende Ableitung von ungerader Ordnung ist.

Anwendungen.

187. 1. *Minimum von x^x.* Da wir statt des Minimums dieser Funktion auch dasjenige ihres natürlichen Logarithmus suchen können, so setzen wir

$$f(x) = l.x^x = x\,l\,x.$$

und erhalten

$$f'(x) = 1 + l\,x,\ f''(x) = \frac{1}{x}.$$

Setzen wir nun

$$1 + l\,x = 0,$$

so wird

$$l\,x = -1,$$

und folglich

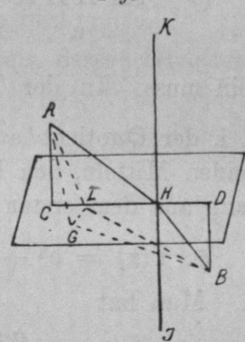
$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Da $$f''\left(\frac{1}{e^{-1}}\right) = e > 0,$$

so ist x^x ein Minimum für $x = \frac{1}{e}$.

2. *Es sind zwei Punkte A und B gegeben, die in verschiedenen Mitteln liegen und durch eine Ebene P getrennt sind. Ein Punkt bewegt sich in dem ersten Mittel mit der gleichförmigen Geschwindigkeit u und in dem zweiten mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v; man sucht den Weg, den dieser Punkt durchlaufen muss, um in der kürzesten Zeit von A nach B zu gelangen.*

Fig. 9.



Zunächst ist klar, dass der Weg aus geraden Linien zusammengesetzt sein muss. Fällt man ferner von A und B auf P die Lote AC und BD und legt durch sie die Ebene ABCD, so muss die die Aufgabe lösende gebrochene Linie in dieser Ebene liegen. Denn, wäre das nicht der Fall, und AGB die gesuchte gebrochene Linie, die P in dem ausserhalb ABCD liegenden Punkte G träfe, so ziehe man GL senkrecht auf CD und verbinde AL und BL. Da nun die Dreiecke AGL und BGL in L rechtwinklig sind, so ist $AL < AG$ und $BL < BG$; folglich muss der bewegte Punkt schneller auf der Linie ALB als auf der Linie AGB von A nach B gelangen. Die Linie AHB, die der bewegte Punkt in der kleinsten möglichen Zeit durchläuft, muss also in der zu P senkrechten Ebene ABCD liegen. Ist

$$AC = a,\ BD = b,\ CD = c,\ CH = x,$$

so ist die Zeit, die der bewegte Punkt braucht, um von A nach H zu gelangen, gleich $\frac{AH}{u} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{u}$, und die Zeit, die er auf den Übergang von H nach B verwendet, ist gleich $\frac{BH}{v} = \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v}$. Die Funktion, die ein Minimum werden soll, ist also

$$f(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{u} + \frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v}.$$

Wir setzen daher

$$f'(x) \text{ oder } \frac{x}{u\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{v\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = 0,$$

oder

$$\frac{x}{u\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{v\sqrt{b^2+(c-x)^2}}.$$

Um aus dieser Gleichung den Wert von x zu erhalten, müsste man beide Seiten ins Quadrat erheben und hätte dann eine Gleichung vierten Grades aufzulösen. Nun ist aber

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sin CAH = \sin AHK,$$

$$\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = \sin HBD = \sin BHJ;$$

man sieht daher, dass im Falle eines Minimums — denn ein Maximum hat f (x) offenbar nicht —

$$\frac{\sin AHK}{u} = \frac{\sin BHJ}{v}, \text{ oder } \frac{\sin AHK}{\sin BHJ} = \frac{u}{v}$$

sein muss. In der Theorie des Lichtes bedeutet die Grösse $\frac{u}{v}$, d. i. der Quotient aus den Geschwindigkeiten des Lichts in den beiden Mitteln, den Berechnungsindex des Lichts bei dessen Übergang aus dem ersten in das zweite Mittel.

3. $f(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x}$.

Man hat

$$f'(x) = e^x - 2\sin x - e^{-x},$$
$$f''(x) = e^x - 2\cos x + e^{-x}.$$

Setzt man $f'(x) = 0$, so wird $x = 0$ und, durch Einsetzen dieses Wertes in f (x), $f(0) = 4$.

Um festzustellen, ob dieses ein Maximum oder ein Minimum ist, setzen wir in $f''(x)$ $x = 0$. Da aber $f''(0) = 0$, müssen wir noch weiter gehen. Es ist

$$f'''(x) = e^x + 2\sin x - e^{-x}, \quad f''''(x) = e^x + 2\cos x + e^{-x},$$

und folglich

$$f'''(0) = 0, \quad f''''(0) = 4;$$

also ist $f(0) = 4$ ein Minimum von f (x).

4. *Man soll den kleinsten Abstand eines gegebenen Punktes M (a, b) von einer Kurve, deren Gleichung bekannt ist, bestimmen.*

Die Gleichung der Kurve sei

$$y = f(x). \tag{1}$$

Bezeichnet K irgend einen Punkt der Kurve und man verbindet M mit K, so ist

$$\overline{MK}^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

Setzen wir das Differential dieses Ausdruckes gleich Null, so wird

$$(x - a) + (y - b)\frac{dy}{dx} = 0,$$

oder auch

$$\frac{y - b}{x - a}\frac{dy}{dx} + 1 = 0. \qquad (2)$$

Dieses ist die Gleichung der im Berührungspunkte der Tangente errichteten Normalen. Die Linie des kleinsten Abstandes muss also die Kurve rechtwinklig schneiden.

Hat der Abstand MK ein Maximum, so ist es ebenfalls durch die Auflösung der Gleichungen (1) und (2) zu bestimmen.

Wir betrachten als besonderen Fall den Kreis, dessen Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ist. Man hat

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

und die Gleichung (2) nimmt die Gestalt an

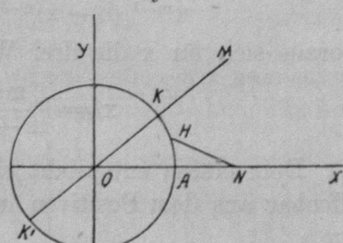
$$1 - \frac{y - b}{x - a}\frac{x}{y} = 0,$$

woraus

$$y = \frac{b}{a}x$$

folgt.

Fig. 10.



Zur Bestimmung von x und y haben wir also die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = \frac{b}{a}x,$$

die beide zusammen die Schnittpunkte des gegebenen Kreises mit der Geraden MO darstellen. Demnach ist KM das Minimum, K'M das Maximum des Abstandes, wie sich durch Betrachtung der höheren Ableitungen leicht ergiebt.

Hier ist aber ein besonderer Fall zu beachten, dessen Erklärung sich jedoch sofort aus der Definition des Maximums und Minimums ergiebt.

Angenommen, der gegebene Punkt, der mit N bezeichnet sei, liege auf der Abscissenaxse im Abstande a vom Mittelpunkte. Das Quadrat des Abstandes NH ist dann durch den Ausdruck gegeben

$$y^2 + (x - a)^2,$$

der gleich

$$r^2 - 2ax + a^2$$

ist. Die Ableitung dieses Ausdruckes ist nun aber eine Konstante $(-2a)$, und kann demnach nicht gleich Null gesetzt werden. Obgleich es also ein Minimum des Abstandes giebt, das gleich NA ist, kann es durch unser Verfahren nicht erhalten werden. Dieses kommt daher, weil nach der Definition eine Funktion für einen bestimmten Wert der Veränderlichen dann ein Minimum ist, wenn sie für die grösseren und kleineren Werte derselben zunimmt. Wird nun aber NH als Funktion von x aufgefasst, so ist NA nicht mehr ein Minimum in dem eben bestimmten Sinne; denn diese Funktion, die für $x < r$ reell ist, wird für $x > r$ imaginär.

5. $f(x) = x^m (b-x)^n$.

Diese Funktion ist Null für $x = 0$ und für $x = b$; zwischen den beiden Werten 0 und b muss also offenbar wenigstens einer liegen, für den sie ein Maximum wird. Nehmen wir die Ableitung, so ist

$$\begin{aligned} f'(x) &= m x^{m-1} (b-x)^n - n x^m (b-x)^{n-1} \\ &= x^{m-1} (b-x)^{n-1} (mb - mx - nx). \end{aligned}$$

Also ist zu setzen

$$x^{m-1} (b-x)^{n-1} [mb - (m+n)x] = 0,$$

woraus sich für x die drei Werte ergeben

$$x = \frac{mb}{m+n}, \quad x = b, \quad x = 0.$$

Dem ersten entspricht ein Maximum; denn die Ableitung geht offenbar aus dem Positiven in das Negative über, wenn x den Wert $\frac{mb}{m+n}$ überschreitet.

Wenn m gerade ist, und nur dann, entspricht dem Werte $x = 0$ ein Minimum. Denn die Faktoren $(b-x)^{n-1}$ und $mb-(m+n)x$ sind für positive und negative der Null sehr nahe liegende Werte immer positiv, während x^{m-1} für gerade m aus dem Negativen in das Positive übergeht; die Funktion ist demnach in diesem Falle ein Minimum. Ist dagegen m ungerade, so ändert keiner der Faktoren der Ableitung sein Vorzeichen, und es ist dann weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden.

Man sieht auch, dass dem Werte b ein Minimum entspricht, wenn n gerade ist, dass aber weder ein Maximum noch ein Minimum existiert, wenn n ungerade ist.

Maxima und Minima unentwickelter Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen.

188. Ist

$$y^2 - 2mxy + x^2 = a$$

eine Gleichung, die y als Funktion von x bestimmt, so kann man, ohne sie aufzulösen, die Maxima und Minima von y bestimmen. Denn durch Differentiation dieser Gleichung erhalten wir

$$(y - mx)\frac{dy}{dx} - my + x = 0,$$

und folglich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{my - x}{y - mx}.$$

Da die Werte von x, die einem Maximum oder Minimum von y entsprechen, der Bedingung

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

genügen müssen, so erhält man sie, durch Auflösung der beiden Gleichungen

$$y^2 - 2mxy + x^2 = a, \quad x - my = 0.$$

189. Der grösseren Allgemeinheit wegen wollen wir annehmen, dass wir drei Gleichungen zwischen vier Unbekannten haben, nämlich

$$\left.\begin{aligned} f(x, y, z, u) &= 0 \\ \varphi(x, y, z, u) &= 0 \\ \psi(x, y, z, u) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Wird irgend eine dieser Veränderlichen, z. B. x, als unabhängige Veränderliche angenommen, so sind die drei anderen Funktionen von ihr. Wir betrachten im besonderen die Funktion u. Um die Werte von x und die entsprechenden Werte von y und z zu bestimmen, die Maxima oder Minima von u ergeben, ist zu beachten, dass gewöhnlich für ein Maximum oder Minimum

$$\frac{du}{dx} = 0$$

ist. Werden demnach y, z, u als Funktionen von x aufgefasst und die $\frac{du}{dx}$ enthaltenden Glieder weggelassen, so ergiebt die Differentiation der Gleichungen (1)

$$\left.\begin{aligned}\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{df}{dz}\frac{dz}{dx}&=0,\\ \frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dx}&=0,\\ \frac{d\psi}{dx}+\frac{d\psi}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{d\psi}{dz}\frac{dz}{dx}&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

Durch Elimination von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ erhält man eine Gleichung

$$F(x, y, z, u) = 0, \qquad (3)$$

die in Verbindung mit den Gleichungen (1) die Werte von x, y, z, u bestimmt.

Durch nochmalige Differentiation der Gleichungen (1) erhält man $\frac{d^2u}{dx^2}$. Substituiert man hierin die für x, y, z, u gefundenen Werte, so wird u ein Minimum oder Maximum sein, je nachdem das Resultat positiv oder negativ ist.

Man kann $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ zwischen den Gleichungen (2) in der Weise eliminieren, dass man letztere bezw. mit 1, λ, μ multipliziert und addiert, und dann die unbestimmten Grössen λ und μ so wählt, dass in dem Resultate die Coëfficienten von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ verschwinden. An die Stelle der Gleichungen (2) treten dann die folgenden

$$\left.\begin{aligned}\frac{df}{dx}+\lambda\frac{d\varphi}{dx}+\mu\frac{d\psi}{dx}&=0,\\ \frac{df}{dy}+\lambda\frac{d\varphi}{dy}+\mu\frac{d\psi}{dy}&=0,\\ \frac{df}{dz}+\lambda\frac{d\varphi}{dz}+\mu\frac{d\psi}{dz}&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

Die Elimination von λ und μ führt bisweilen schneller zu der Gleichung (3) als die Elimination von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ zwischen den Gleichungen (2).

190. Es seien die Maxima und Minima einer entwickelten Funktion F (x, y, z, u) zu bestimmen, wenn die Veränderlichen x, y, z, u unter sich durch die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r} f\,(x, y, z, u) = 0 \\ \varphi\,(x, y, z, u) = 0 \\ \psi\,(x, y, z, u) = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

verbunden sind. Betrachtet man eine der Veränderlichen, z. B. x als unabhängig, so werden y, z, u, F (x, y, z, u) Funktionen von x.

Fügt man zu den Gleichungen (1) die Gleichung

$$F\,(x, y, z, u) - v = 0$$

hinzu, so erhält man, wie ersichtlich, einen besonderen Fall der vorhergehenden Aufgabe, nämlich den, dass die unentwickelte Funktion v, deren Maxima und Minima man sucht, nur in einer der Gleichungen (1) vorkommt.

Übungen.

1. Welches ist das grösste Viereck, das aus vier gegebenen Seiten konstruiert werden kann?

Auflösung. — Das Viereck im Kreise.

2. Auf der Peripherie eines gegebenen Kreises soll ein Punkt bestimmt werden, so dass die Summe seiner Abstände von zwei gegebenen Punkten ein Maximum oder ein Minimum ist.

Auflösung. — Der Berührungspunkt des Kreises und einer Ellipse, deren Brennpunkte die beiden gegebenen Punkte sind.

3. In eine gegebene Kugel einen Kegel einzuschreiben, so dass dessen gesamte Oberfläche ein Maximum wird.

Auflösung. — Bezeichnet x die Höhe des Kegels und r den Radius der Kugel, so hat man

$$x = \frac{23 - \sqrt{17}}{16}\, r.$$

4. Um eine gegebene Kugel einen Kegel zu beschreiben, dessen Volumen ein Minimum ist.

Auflösung. — Gelten dieselben Bezeichnungen wie vorher, so ist

$$x = 4\,r, \text{ Vol. min.} = \frac{8}{3}\,\pi\, r^3.$$

5. Unter allen Parabeln, die schwere Körper beschreiben können, wenn sie sich von einem gegebenen Punkte aus mit gegebener Geschwindigkeit bewegen, ist diejenige zu bestimmen, die die grösste Fläche hat.

Auflösung. — Die Parabel, die ein Körper beschreibt, wenn die Richtung, in der geworfen wird, mit dem Horizont einen Winkel von 60^0 bildet.

6. Unter allen Sehnen von gleicher Länge, die in eine gegebene Kurve eingeschrieben sind, soll diejenige bestimmt werden, die das grösste oder das kleinste Segment abschneidet.

Auflösung. — Die Sehne muss mit den Tangenten, die in ihren Endpunkten an die Kurve gezogen werden, gleiche Winkel bilden.

7. Zwei kreisförmige Räder, die ausser einander auf derselben Ebene liegen, drehen sich gleichförmig um ihre festen Mittelpunkte, indem das eine zwei, das andere drei Umläufe in der Sekunde macht. Man soll die Zeitpunkte und Stellungen der beiden Räder bestimmen, in denen sich zwei auf ihren Peripherien bestimmte Punkte in dem grössten oder kleinsten Abstande von einander befinden.

Fünfzehnte Lektion.

Maxima und Minima der Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Maxima und Minima entwickelter und unentwickelter Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

Maxima und Minima der Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher.

191. Ein besonderer reeller Wert einer Funktion von mehreren unabhängigen Veränderlichen $f(x, y, z)$ wird ein Maximum genannt, wenn er alle Werte übersteigt, die die Funktion dadurch annehmen würde, dass man den Veränderlichen Werte beilegt, die von dem betrachteten sehr wenig verschieden sind. Minimum einer Funktion heisst ein besonderer Wert, der kleiner als alle ihm unmittelbar benachbarten ist. Bezeichnen h, k, l Grössen, die hinlänglich klein sind und beliebig klein werden können, so ist also die Differenz

$$f(x + h, y + k, z + l) - f(x, y, z),$$

welche Vorzeichen auch h, k, l, haben, beständig *negativ*, wenn $f(x, y, z)$ ein Maximum ist, und beständig *positiv*, wenn $f(x, y, z)$ ein Minimum ist.

Wir wollen nun annehmen, die Funktion $u = f(x, y, z)$ sei für $x = a$, $y = b$, $z = c$ ein Maximum oder ein Minimum. Legt man in dieser Funktion den Veränderlichen y und z die bestimmten Werte b und c bei und ändert nur x, so wird sie für $x = a$ noch ein Maximum oder ein Minimum sein.

Also muss, für $x = a$, $y = b$, $z = c$, $\frac{du}{dx}$ Null unendlich oder unstetig sein. Das Gleiche gilt für $\frac{du}{dy}$ und $\frac{du}{dz}$. Die Werte von x, y, z, die u zu einem Maximum oder Minimum machen, sind also unter denjenigen zu suchen, für die die Ableitungen $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$ Null, unendlich oder unstetig werden.

192. Beschränken wir uns auf den Fall, dass die Ableitungen stetig sind, so können wir mit Hilfe der Taylorschen Reihe bestimmen, welche Auflösungen des Gleichungssystemes

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0$$

einem Maximum und welche einem Minimum entsprechen. Denn es ist Δu oder

$$f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z) = \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l + R.$$

Man kann nun h, k, l immer hinlänglich klein wählen, so dass die Summe der absoluten Werte der Glieder, die dieselben Potenzen von h, k, l enthalten, den absoluten Wert des dazugehörigen Restes R übersteigt, und ferner ist für die vorliegende Frage anzunehmen, dass h, k, l kleiner als jede gegebene Grösse werden und beliebige Vorzeichen haben können. Hieraus folgt: 1. Δu muss dasselbe Vorzeichen haben, wie

$$\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k + \frac{du}{dz} l,$$

2. wären nicht gleichzeitig

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0,$$

so könnte $f(x, y, z)$ weder ein Maximum noch ein Minimum sein. Denn nur durch Änderung der Vorzeichen von h, k, l ohne Ände-

rung ihres absoluten Wertes würde man das Vorzeichen von $\frac{du}{dx}h + \frac{du}{dy}k + \frac{du}{dz}l$ und demnach auch das von Δu ändern. So ergeben sich wiederum die oben (**191**) erhaltenen Bedingungen.

193. Wir wollen nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass f (x, y, z) ein Maximum oder ein Minimum wird, aufsuchen.

Da das totale Differential der ersten Ordnung Null ist, hat man

$$\Delta u = \frac{1}{1.2}(A h^2 + B k^2 + C l^2 + 2 D h k + 2 E h l + 2 F k l) + R.$$

oder auch

$$\Delta u = \frac{1}{2} d^2 u + R.$$

Zunächst werde angenommen, dass die Coëfficienten A, B, C, D, E, F, die, der Kürze wegen, die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\frac{d^2 u}{dx^2}, \frac{d^2 u}{dy^2}$ u. s. w. bezeichnen, für die betrachteten Werte von x, y, z, für die $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$ verschwinden, nicht alle gleichzeitig Null werden. Ist nun $d^2 u$ nicht identisch gleich Null, so sind drei Fälle möglich: 1) $d^2 u$ kann sein Vorzeichen ändern, dann ist weder ein Maximum noch ein Minimum vorhanden; 2) $d^2 u$ behält immer dasselbe Vorzeichen, dann wird u ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem $d^2 u$ negativ oder positiv ist; 3) $d^2 u$ wird für gewisse Werte von h, k, l Null, ändert aber niemals sein Vorzeichen, dann ist ohne weitere Entwickelung von Δu nicht zu bestimmen, ob die Funktion ein Maximum oder ein Minimum ist.

Wir beschränken uns darauf, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür festzustellen, dass $d^2 u$ oder die Funktion

$$A h^2 + B k^2 + C l^2 + 2 D h k + 2 E h l + 2 F k l$$

beständig positiv bleibt, welche Vorzeichen auch h, k, l, wenn sie sehr klein angenommen werden, haben. Dieser Ausdruck ist aber eine homogene Funktion von h, k, l; bringt man sie auf die Form

$$h^2 \left(A + B \frac{k^2}{h^2} + C \frac{l^2}{h^2} + 2 D \frac{k^2}{h} + 2 E \frac{l}{h} + 2 F \frac{k}{h} \cdot \frac{l}{h}\right),$$

so sieht man, dass, wenn sie für sehr kleine Werte von h, k, l positiv ist, sie auch für beliebig grosse Werte derselben positiv sein wird, wofern deren Verhältnisse sich nicht ändern.

Es ist also notwendig und hinreichend, dass der Ausdruck

$$Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dhk + 2Ehl + 2Fkl$$

für alle reellen Werte von h, k, l positiv ist. Wir beachten nun, dass wenn einer der Coëfficienten der Quadrate, z. B. A, Null ist, die Coëfficienten der Glieder, die h enthalten, d. h. D und E, ebenfalls Null sind. Denn setzen wir

$$P = 2(Dk + El), \; Q = Bk^2 + Cl^2 + 2Fkl,$$

worin P und Q von h unabhängig sind, so haben wir alsdann

$$d^2u = Ph + Q.$$

Legen wir nun k und l willkürliche Werte bei und setzen einmal

$$h = -\frac{Q}{P} + \alpha, \text{ und dann } h = -\frac{Q}{P} - \alpha,$$

so erhalten wir im ersten Falle $P\alpha$ und im zweiten $-P\alpha$. Wäre also P nicht identisch Null, so könnte d^2u sein Vorzeichen ändern.

Die Gleichung $A = 0$ bedingt folglich auch die Gleichungen

$$D = 0, \; E = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Coëfficienten A, B, C nicht gleichzeitig Null sind; denn sonst wäre gegen die Voraussetzung die Funktion d^2u identisch Null.

Angenommen also A z. B. sei nicht Null, so muss es positiv sein; denn setzt man $k = 0$ und $l = 0$, so reduziert sich die Funktion auf das Glied Ah^2, und damit dieses positiv ist, muss A positiv sein. Eine erste notwendige Bedingung im Falle eines Minimums ist also

$$A > 0. \tag{1}$$

Nun kann man d^2u oder die Funktion

$$Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dhk + 2Ehl + 2Fkl$$

auf die Form bringen

$$A\left(h^2 + 2h\frac{Dk + El}{A}\right) + Bk^2 + Cl^2 + 2Fkl$$

$$= A\left(h + \frac{Dk+El}{A}\right)^2 - \frac{D^2k^2 + 2EDkl + E^2l^2}{A} + Bk^2 + Cl^2 + 2Fkl$$

$$= A\left(h + \frac{Dk+El}{A}\right)^2 + \left(B - \frac{D^2}{A}\right)k^2 + \left(C - \frac{E^2}{A}\right)l^2 + 2\left(F - \frac{ED}{A}\right)kl.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$B - \frac{D^2}{A} = G, \; C - \frac{E^2}{A} = J, \; F - \frac{ED}{A} = M,$$

so muss also für alle Werte von h, k, l

$$A\left(h + \frac{Dk + El}{A}\right)^2 + Gk^2 + Jl^2 + 2Mkl > 0$$

sein.

Wäre $G = 0$ und $h = -\frac{Dk + El}{A}$, so würde sich die betrachtete Funktion auf das Binom

$$Jl^2 + 2Mkl$$

reduzieren, das nur dann, wenn $M = 0$ ist, für alle Werte von k und l positiv sein kann.

Da aber d^2u dann auf die Form

$$A\left(h + \frac{Dk + El}{A}\right)^2 + Jl^2$$

gebracht werden könnte, so würde dieses Differential, wenn $l = 0$ ist, für eine unbegrenzte Zahl Werte von k und h Null werden; ein besonderer Fall, den wir ausgeschlossen haben.

Wir nehmen also G von Null verschieden an. Setzt man

$$l = 0 \text{ und } h = -\frac{D}{A}k,$$

so reduziert sich die Funktion auf Gk^2, und da dieser Ausdruck für alle Werte von k positiv sein muss, so folgt als zweite notwendige Bedingung für den Fall eines Minimums

$$G > 0. \tag{2}$$

Sehen wir nun von dem ersten Gliede ab, so kann das betrachtete Polynom geschrieben werden

$$G\left(k^2 + \frac{2Mkl}{G}\right) + Jl^2,$$

oder wenn man zur Abkürzung $J - \frac{M^2}{G} = N$ setzt,

$$G\left(k + \frac{Ml}{G}\right)^2 - \frac{M^2l^2}{G} + Jl^2 = G\left(k + \frac{Ml}{G}\right)^2 + Nl^2$$

Das zweite Differential d^2u wird dann also die Form

$$A\left(h + \frac{Dk + El}{A}\right)^2 + G\left(k + \frac{Ml}{G}\right)^2 + Nl^2$$

erhalten, und wie oben folgt, dass

$$N > 0 \tag{3}$$

sein muss.

Soll die Funktion f (x, y, z) ein Minimum sein, so sind demnach im Allgemeinen die drei Bedingungen

$$A > 0, \quad G > 0, \quad N > 0$$

notwendig. Diese Bedingungen sind auch hinreichend; denn sind sie erfüllt, so wird

$$A\left(h + \frac{Dk + El}{A}\right)^2 + G\left(k + \frac{Ml}{G}\right)^2 + Nl^2,$$

d. h. d^2u, für alle reellen Werte von h, k, l positiv sein.

194. Ist f (x, y, z) ein Maximum, so folgt analog, dass für alle reellen h, k, l

$$Ah^2 + Bk^2 + \ldots + 2\,Fkl < 0,$$

oder

$$-Ah^2 - Bk^2 - \ldots - 2\,Fkl > 0$$

sein muss. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ein Maximum erhält man also, indem man in den obigen drei Bedingungen für A, B, F bezw. $-A$, $-B$, $-F$ setzt.

195. Wenn für die Werte von x, y, z, die sich aus den Gleichungen

$$\frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0$$

ergeben, die Differentialquotienten A, B, C, D, E, F sämtlich Null sein würden, so müssten, wie leicht ersichtlich, alle Differentialquotienten dritter Ordnung identisch Null sein. Wir wollen jedoch diese Untersuchung nicht weiter fortsetzen; weil die Bedingungen, die die Differentialquotienten vierter Ordnung dann zu erfüllen haben, damit f (x, y, z) ein Maximum oder Minimum wird, allzu verwickelt werden.

Maxima und Minima unentwickelter Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.

196. Gegeben seien die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} f\,(x, y, z, u, v) &= 0, \\ \varphi\,(x, y, z, u, v) &= 0, \\ \psi\,(x, y, z, u, v) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Betrachtet man zwei Veränderliche, z. B. x und y, als unabhängig, so werden z, u, v Funktionen von x und y, die durch die vorstehenden Gleichungen bestimmt sind. Soll nun z. B. die Funk-

tion v ein Maximum oder Minimum werden, so sind nach der oben gegebenen Regel die Gleichungen

$$\frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dy} = 0$$

aufzulösen. Demnach muss das vollständige Differential von v, d. h.

$$\frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy = 0$$

sein.

Differenziert man die Gleichungen (1) und beachtet, dass $dv = 0$ ist, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz + \frac{df}{du}du = 0, \\ \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz + \frac{d\varphi}{du}du = 0, \\ \frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{dy}dy + \frac{d\psi}{dz}dz + \frac{d\psi}{du}du = 0. \end{aligned}\right\} 0$$

In diesen Gleichungen sind dx, dy Konstanten und dz, du die vollständigen Differentiale von z und u als Funktionen von x und y betrachtet. Werden dz und du aus den Gleichungen (2) eliminiert, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$P\,dx + Q\,dy = 0,$$

die sowohl für ein Maximum wie für ein Minimum durch die entsprechenden Werte von x und y zu erfüllen ist.

Da dx und dy von einander ganz unabhängig sind, muss also

$$P = 0, \; Q = 0 \tag{3}$$

sein. Aus den Gleichungen (1) und (3) ergeben sich die gesuchten Werte von x, y, z, u, v.

Um festzustellen, ob der entsprechende Wert der Funktion ein Maximum oder ein Minimum ist, muss man noch untersuchen, ob das vollständige Differential d^2v immer dasselbe Vorzeichen behält.

197. Das vorstehend Angegebene enthält als besonderen Fall die Bestimmung der Maxima und Minima der Funktionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen, die unter sich durch eine gewisse Anzahl von Gleichungen verbunden sind.

Ist z. B. die Funktion

$$v = F(x, y, z, u)$$

zu betrachten, und bestehen ausserdem die Beziehungen

$$\varphi\ (x, y, z, u) = 0,$$
$$\psi\ (x, y, z, u) = 0,$$

so hat man offenbar in der obigen Erörterung $F(x, y, z, u) - v$ für $f(x, y, z, u, v)$ zu setzen, und die Funktionen φ und ψ von v unabhängig anzunehmen.

Übungen.

1. Man soll den kürzesten Abstand zweier durch ihre Gleichungen gegebenen Geraden im Raume finden.

Auflösung. — Sind die Gleichungen der Geraden

$$\begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q, \end{cases} \quad \begin{cases} x = a'z + p', \\ y = b'z + q', \end{cases}$$

so ist ihr kürzester Abstand

$$\frac{(a - a')(q - q') - (b - b')(p - p')}{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2}}.$$

2. Unter den Parallelepipeda von gleicher Oberfläche ist das von grösstem Inhalte zu bestimmen.

Auflösung. — Der Würfel.

3. Durch einen gegebenen Punkt soll die kürzeste Gerade zwischen zwei gegebenen Kurven gezogen werden.

Auflösung. — Die durch die Endpunkte der kürzesten Geraden gelegten Normalen müssen das auf ihr in dem gegebenen Punkte errichtete Lot in demselben Punkte treffen.

4. Auf einer Fläche zweiten Grades ist der grösste und der kleinste vom Centrum ausgehende Radius vector zu bestimmen.

5. Ein Punkt M im Raume ist so zu bestimmen, dass eine Funktion seiner Abstände von gegebenen Punkten ein Maximum oder ein Minimum wird.

Auflösung. — Sind p, p', p'' die gesuchten Abstände, und ist $u = f(p, p', p'')$ die Funktion, die ein Maximum oder Minimum sein soll, so muss der Punkt M im Gleichgewicht bleiben, wenn Kräfte auf ihn wirken, die proportional $\frac{du}{dp}, \frac{du}{dp'}, \frac{du}{dp''}$ sind und die Richtungen p, p', p''' haben. (Annales de Gergonne, t. XIV, p. 118).

Sechzehnte Lektion.

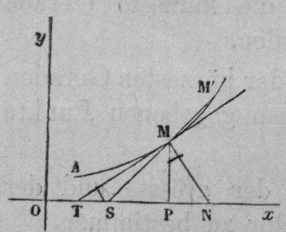
Geometrische Anwendungen der Differentialrechnung.

Theorie der Tangenten.

Gleichungen der Tangente und der Normale. — Länge der Subtangente, Subnormale u. s. w. — Grad der Gleichung der Tangente. — Aufgaben über die Tangenten. — Sinn der Konkavität und Konvexität der Kurven.

Gleichungen der Tangente und der Normale.

Fig. 11.



198. Es sei

$$f(x, y) = 0$$

die Gleichung einer ebenen Kurve A M M'. Ist M T die Tangente derselben im Punkte M (x, y), so hat man für rechtwinklige Koordinatenaxen

$$\text{tang}\, M T x = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}.$$

Bezeichnen X und Y die laufenden Koordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente, so wird demnach die Gleichung dieser Geraden

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x). \qquad (1)$$

Setzt man dann für $\frac{dy}{dx}$ dessen aus der Gleichung der Kurve abgeleiteten Wert, so wird die Gleichung der Tangente

$$Y - y = -\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}(X - x)$$

oder

$$\frac{df}{dx}(X-x) + \frac{df}{dy}(Y-y) = 0. \qquad (2)$$

199. Die Gleichung der Tangente behält auch für ein schiefwinkliges Koordinatensystem dieselbe Form. Denn sind x und y die Koordinaten des Berührungspunktes M einer an die Kurve A M M′ gezogenen Tangente M T, so hat diese die Form

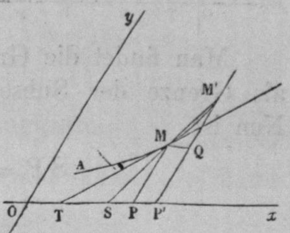
$$Y - y = a(X - x).$$

Ferner hat die Sekante M′M S die Gleichung

$$Y - y = a'(X - x),$$

und a ist der Grenzwert von a′, wenn der Punkt M′ mit M zusammenfällt.

Fig. 12.



Ziehen wir nun M P und M′ P′ parallel O y und M Q parallel O x, so wird

$$\frac{M'Q}{MQ} = a'.$$

Es ist aber

$$M'Q = \Delta y, \; MQ = \Delta x,$$

und demnach

$$a' = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Folglich wird

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ oder } a = \frac{dy}{dx}.$$

Also

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

ist in jedem Falle die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y).

200. Hiernach ist für rechtwinklige Koordinatenaxen die Gleichung der Normalen M N

$$Y - y = -\frac{dx}{dy}(X - x).$$

Sind die Axen schiefwinklig und schliessen den Winkel ϑ ein, so wird die Gleichung dieser Geraden

$$Y - y = -\frac{dx + dy\cos\vartheta}{dy + dx\cos\vartheta}(X - x).$$

Hieraus ergiebt sich nach einem Satze über die homogenen Funktionen (**178**)

$$\frac{df}{dx}x + \frac{df}{dy}y = mu + (m-1)u_1 + (m-2)u_2 + \ldots$$
$$= m(u + u_1 + u_2 + \ldots) - u_1 - 2u_2 - 3u_3 - \ldots.$$

Da nun aber der Punkt (x, y) auf der Kurve liegt, hat man

$$m(u + u_1 + u_2 + \ldots) = 0;$$

die Gleichung der Tangente wird also

$$\frac{df}{dx}X + \frac{df}{dy}Y + u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \ldots = 0,$$

und enthält somit keine Glieder m^{ten} Grades, was zu beweisen war,

Beispiel.

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Man hat

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{By + 2Cx + E}{2Ay + Bx + D},$$

und erhält somit als Gleichung der Tangente

$$(2Ay + Bx + D)(Y - y) + (By + 2Cx + E)(X - x) = 0,$$

oder

$$(2Ay + Bx + D)Y + (By + 2Cx + E)X$$
$$= (2Ay + Bx + D)y + (By + 2Cx + E)x.$$

Vereinfacht man diese Gleichung mittels der Gleichung der Kurve, so wird schliesslich die Gleichung der Tangenten im Punkte (x, y)

$$(2Ay + Bx + D)Y + (By + 2Cx + E)X + Dy + Ex + 2F = 0.$$

Aufgaben über die Tangenten.

203. An eine gegebene Kurve von einem äusseren Punkte (a, b) eine Tangente zu ziehen.

Um die unbekannten Koordinaten x und y des Berührungspunktes zu bestimmen, hat man zunächst die Gleichung der Kurve

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

und ferner die Gleichung

$$a\frac{df}{dx} + b\frac{df}{dy} = \frac{df}{dx}x + \frac{df}{dy}y, \tag{2}$$

die man erhält, wenn man in der Gleichung der Tangente (**198**) a und b für X und Y setzt.

Die aus den Gleichungen (1) und (2) für x und y abgeleiteten Werte geben die Koordinaten des Berührungspunktes. Ist f (x, y) eine rationale ganze Funktion m^{ten} Grades, so ist die Gleichung (2) vom $(m-1)^{ten}$ Grade; die Aufgabe hat demnach höchstens m (m — 1) Lösungen. Für m = 2 giebt es höchstens zwei Tangenten, für m = 3 höchstens sechs u. s. f.

Die Gleichung (2) stellt für sich betrachtet einen geometrischen Ort dar, der alle Berührungspunkte enthält und der höchstens vom $(m-1)^{ten}$ Grade ist.

204. Eine Tangente parallel einer Geraden zu ziehen, deren Gleichung $Y = aX$ ist. Da die Gleichung der gesuchten Tangente

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

ist, muss

$$\frac{dy}{dx} = a$$

sein, durch welche Gleichung in Verbindung mit der der Kurve die Koordinaten des Berührungspunktes bestimmt werden. Da aus der Gleichung $\frac{dy}{dx} = a$ die Gleichung

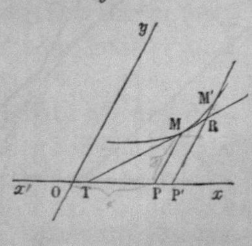
$$-\frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = a, \text{ oder } \frac{df}{dx} + a\frac{df}{dy} = 0$$

folgt, die vom $(m-1)^{ten}$ Grade ist, wenn f (x, y) vom m^{ten} Grade ist, so hat die Aufgabe höchstens m (m — 1) Auflösungen.

Über die Konkavität und Konvexität der ebenen Kurven.

205. Wir wollen nun für dieselbe Abscisse die Ordinaten einer Kurve mit denen ihrer Tangente in der Nähe des Berührungspunktes vergleichen. MT sei eine an die Kurve MM' gezogene Tangente, und x = OP, y = MP seien die Koordinaten ihres Berührungspunktes. Bezeichnet man PP' durch h, so wird

Fig. 15.



$$M'P' = y + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + R.$$

Da die Gleichung der Tangente

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

ist, hat man für den Punkt, dessen Abscisse $x + h$ ist,

$$Y - y = \frac{dy}{dx} h.$$

Demnach ist die entsprechende Ordinate

$$P'R = y + h \frac{dy}{dx},$$

und folglich

$$M'R = M'P' - P'R = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2} + R.$$

Bei der Entwickelung des Taylorschen Satzes wurde bewiesen, dass für hinlänglich kleine h, und wenn die zweite Ableitung $\frac{d^2y}{dx^2}$ von Null verschieden ist, der absolute Betrag von $\frac{d^2y}{dx^2} \frac{h^2}{1.2}$ grösser als der von R ist; für einen Punkt M' der Kurve, der auf der einen oder der anderen Seite dem Punkte M hinlänglich nahe liegt, hat demnach die Differenz $M'P' - P'R$ dasselbe Vorzeichen wie $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Ist also

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \tag{1}$$

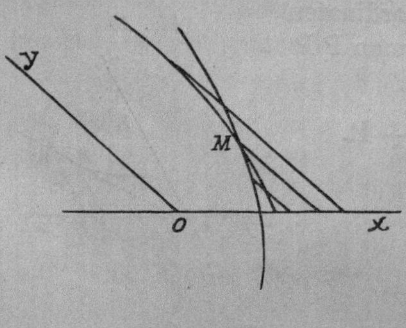
so sind für die Punkte in der Nähe von M die Ordinaten der Kurve grösser als die der Tangente. Ist dagegen

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0, \tag{2}$$

so sind die Ordinaten der Tangente grösser als die der Kurve.

Im ersten Falle, den Fig. 15 darstellt, liegt die Kurve in der Nähe des Punktes M in dem stumpfen Winkel M T x', den die Tangente M T mit der Abscissenaxe bildet; man sagt dann, die Kurve kehrt bei dem Punkte M ihre Konvexität der Abscissenaxe zu.

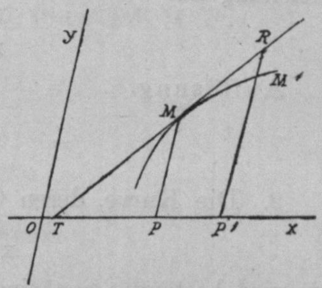
Fig. 16.



Dieses Verhalten wird also durch die Ungleichung (1) ausgedrückt, wenigstens wenn der Winkel, den die Axen mit einander bilden, nicht grösser als 90° ist. Denn ist derselbe stumpf und grösser als der Winkel zwischen Tangente und x-Axe, so bleiben zwar, wie Fig. 16 zeigt, die Ordinaten der Kurve zu beiden Seiten von M grösser als die

der Tangente; aber man kann dann nicht sagen, dass die Kurve gegen die x-Axe konvex ist.

Fig. 17.

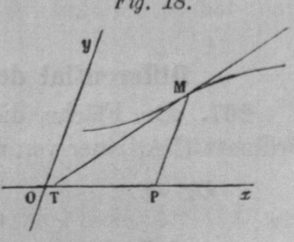


Im zweiten Falle, den Fig. 17 darstellt, liegt die Kurve zu beiden Seiten von M in dem spitzen Winkel, den die Tangente mit der Axe O x bildet. Man sagt dann, die Kurve kehrt bei dem Punkte M ihre Konkavität der Abscissenaxe zu; die Ungleichung (2) drückt dieses Verhalten aber nur dann sicher aus, wenn der Winkel, den die Axen miteinander bilden, kleiner als 90° ist.

In dem Vorstehenden ist vorausgesetzt, dass die Ordinate des Punktes M positiv ist. Liegt derselbe unter der Abscissenaxe, so ist, wie leicht ersichtlich, die Kurve konvex oder konkav gegen die Abscissenaxe, je nachdem $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ oder > 0 ist.

Es hat sich also folgendes ergeben: Je nachdem y und $\frac{d^2y}{dx^2}$ dasselbe oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, ist die Kurve bei dem Punkte M gegen die Abscissenaxe konvex oder konkav, vorausgesetzt, dass der Winkel, den die positiven Richtungen der Koordinatenaxen miteinander bilden, nicht grösser als ein Rechter ist. Ist derselbe stumpf, so erhält man durch Änderung des Vorzeichens der einen Koordinate einen spitzen Winkel zwischen den positiven Richtungen der Axen und kann dann dieselbe Regel wie vorhin anwenden.

Fig. 18.



206. Bisher wurde vorausgesetzt, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ für die zu beiden Seiten von M liegenden Punkte dasselbe Vorzeichen hat; es kann jedoch vorkommen, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ dasselbe Vorzeichen wie y hat, wenn x ein wenig kleiner als O P ist, und das entgegengesetzte, wenn x grösser als O P wird, oder umgekehrt. Die Kurve liegt dann gegen die Abscissenaxe links von M konvex oder konkav und rechts von M konkav oder konvex.

Man sagt dann, die Kurve wendet sich im Punkte M, und derselbe wird ein Wendungspunkt genannt. Diese merkwürdigen Punkte werden also erhalten, indem man die Werte von x und y aufsucht, für die $\frac{d^2y}{dx^2}$ Null oder unendlich wird und zugleich sein Vorzeichen ändert.

Übungen.

1. Die Subtangente der Kurve ist zu bestimmen, die die Gleichung hat

$$x = e^{\frac{x-y}{y}}.$$

Auflösung.

$$\frac{x^2}{x-y}.$$

2. Die Kurve, deren Gleichung

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

ist, wird beständig von einer Geraden von unveränderlicher Länge berührt, die, indem sich auf die Koordinatenaxen stützt, gleitet.

Siebzehnte Lektion.

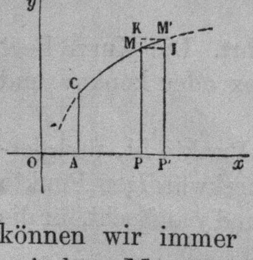
Sätze über die Flächen und Bogen ebener Kurven.

Differential der Fläche einer ebenen Kurve. — Flächen als Grenzwerte einer Summe von Parallelogrammen aufgefasst. — Anwendungen. — Rektifikation eines ebenen Kurvenbogen. — Differential eines Kurvenbogen. — Grenzwert des Verhältnisses zwischen Bogen und Sehne. — Neue Sätze über Kurvenbogen als Grenzwerte betrachtet.

Differential der Fläche einer ebenen Kurve.

207. Die Fläche, die von einer ebenen Kurve C M, einer festen Ordinate C A, einer veränderlichen Ordinate M P und der Abscissenaxe O x umschlossen wird, ist eine Funktion der Abscisse O P = x des Punktes M, da sie sich mit derselben ändert.

Fig. 19.



Wir wollen nun ihr Differential bestimmen. Wir bezeichnen mit u die Fläche C A M P und mit Δ u die Fläche M M' P P', die einer sehr kleinen Änderung P P' = Δ x der Abscisse O P entspricht. Den Punkt M' können wir immer so nahe bei M annehmen, dass die Ordinaten zwischen M und M' beständig zu- oder abnehmen, und wir wollen

~~und wir wollen~~ hier, um bestimmte Vorstellungen zu haben, das Erstere voraussetzen. Ziehen wir nun zwischen MP und M'P' parallel zu Ox die Geraden MJ und M'K, so ist

$$PMM'P' > PMJP' \text{ und } PMM'P' < PKM'P',$$

d. h.

$$\Delta u > y\,\Delta x \text{ und } \Delta u < (y + \Delta y)\,\Delta x,$$

oder

$$y < \frac{\Delta u}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Hieraus folgt durch Übergang zur Grenze

$$\frac{du}{dx} = y, \text{ oder } du = y\,dx.$$

208. Die Annahme, dass die Ordinaten zwischen M und M' beständig wachsen oder abnehmen, wenn beide Punkte einander genügend nahe liegen, ist zwar unbedingt zulässig; aber für den Beweis ist sie nicht notwendig. Um sich davon zu überzeugen, braucht man nur in den vorstehenden Schlussfolgerungen statt y und $y + \Delta y$ überall y_1 und y_2 zu setzen, wenn y_1 die kleinste und y_2 die grösste Ordinate in dem Intervall bezeichnet, worin man die Abscisse sich ändern lässt.

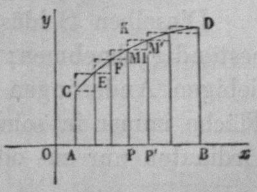
209. Auch im Falle schiefwinkliger Koordinatenaxen ist der Beweis analog zu führen, mit dem einzigen Unterschiede, dass die Änderung Δu dann zwischen den Flächen zweier Parallelogramme liegt, deren Seiten den Axen parallel sind, und da die Fläche eines Parallelogrammes gleich dem Produkt zweier anliegenden Seiten in den Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels ist, so hat man dann, wenn ϑ den Axenwinkel bezeichnet,

$$du = y\,dx \sin\vartheta.$$

Flächen als Grenzwerte einer Summe von Parallelogrammen aufgefasst.

210. Im Falle rechtwinkliger Axen ist die Fläche ABCD der Grenzwert einer Summe von inneren Rechtecken, die entstehen, wenn man auf der Kurve die Punkte C, E, F ... M, M' u. s. w. annimmt, durch sie Parallelen zu Ox legt, deren jede von zwei unmittelbar aufeinander folgende Ordinaten begrenzt wird, und diese Punkte sich unbeschränkt einander nähern lässt, indem zugleich ihre Anzahl unendlich wird.

Fig. 20.



Zuerst werde angenommen, die Ordinaten wachsen beständig von C bis D. Sind dann x, y die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kurve, z. B. von M, und $x + \varDelta x$, $y + \varDelta y$ die Koordinaten des darauffolgenden Punktes M', so ist

$$MJP'P = y\,\varDelta x.$$

Bezeichnet man ferner durch $\sum (y\,\varDelta x)$ die Summe aller mit $y\,\varDelta x$ analogen Ausdrücke, d. h. die Summe aller zwischen CA und BD liegenden inneren Rechtecke und setzt Fl. ACDB = u, so ist offenbar

$$u > \sum (y\,\varDelta x).$$

Zieht man nun durch jeden der betrachteten auf der Kurve liegenden Punkte eine Parallele zu Ox, deren jede von der Ordinate des unmittelbar vorhergehenden Punktes begrenzt wird, so entstehen äussere Rechtecke wie

$$PKM'P' = (y + \varDelta y)\,\varDelta x = y\,\varDelta x + \varDelta y\,\varDelta x,$$

und da die Fläche ABCD kleiner als die Summe dieser Rechtecke ist, hat man

$$u < \sum (y\,\varDelta x) + \sum (\varDelta y\,\varDelta x),$$

und folglich

$$u - \sum (y\,\varDelta x) < \sum (\varDelta y\,\varDelta x).$$

Da aber mit zunehmender Zahl der Teile $\varDelta y$ sich der Null nähert, so folgt aus einem früher bewiesenen Satze (**16**), dass $\sum (\varDelta y\,\varDelta x)$ sich auch der Null nähert; also ist

$$u = \lim \left[\sum (y\,\varDelta x)\right].$$

Ebenso ist zu beweisen, dass u auch der Grenzwert der Summe der Rechtecke wie PKM'P' ist.

Dieselben Schlüsse gelten, wenn die Ordinaten von C bis D beständig abnehmen; der soeben bewiesene Satz gilt also bei beliebigen Änderungen der Koordinaten: denn man kann die ganze Fläche immer in solche Teile zerlegen, dass in jedem einzelnen die Ordinaten nur zu- oder abnehmen.

Anwendungen.

211. 1. Es sei

$$y^2 = 2\,p\,x$$

die Gleichung einer Parabel, bezogen auf ihre Axe und die sie im Scheitel berührende Tangente.

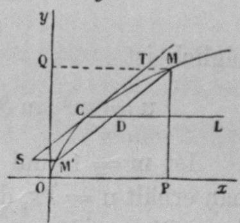
Setzt man Fl. O M P = u, so ist

$$du = y\,dx = \sqrt{2px}\,.\,dx = \sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Nun ist

$$x^{\frac{1}{2}}\,.\,dx = \frac{2}{3}\,d\,.\,x^{\frac{3}{2}},$$

Fig. 21.



und demnach

$$du = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\;d\,.\,x^{\frac{3}{2}} = d\left(\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,.\,x^{\frac{3}{2}}\right).$$

Folglich ist

$$u = \frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x^{\frac{3}{2}} + C;$$

da aber, für x = 0, u = 0 sein muss, so ist C = 0, und

$$u = \frac{2}{3}\sqrt{2px}\,.\,x = \frac{2}{3}\,x\,y:$$

d. h. das Segment O M P ist gleich zwei Dritteln des Rechteckes O P M Q.

Ebenso leicht kann die zwischen einem Parabelbogen M C M' und seiner Sehne liegende Fläche bestimmt werden.

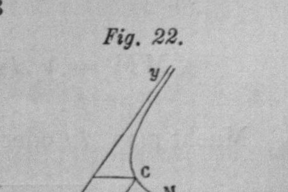
Denn zieht man die Tangente C T parallel zu M M' und durch den Berührungspunkt C den Durchmesser C D L, und setzt C D = x, M D = y, T C L = ϑ; so findet man durch dasselbe Verfahren wie vorhin

$$\text{Fl. } CMD = \frac{2}{3}\,xy\sin\vartheta = \frac{2}{3}\,CDMT,$$

und folglich

$$\text{Fl. } MCM' = \frac{4}{3}\,xy\sin\vartheta = \frac{2}{3}\,MTSM'.$$

Fig. 22.



2. Es sei

$$xy = m^2$$

die Gleichung einer auf ihre Asymptoten bezogenen Hyperbel. Bezeichnet u die Fläche des Segmentes A C M P, das von der Kurve, der Asymptote O x, der festen

Ordinate $CA = m$ und der veränderlichen Ordinate MP eingeschlossen wird, so ist

$$du = y \sin\vartheta\, dx = m^2 \sin\vartheta \frac{dx}{x} = m^2 \sin\vartheta\, d\,.\,lx.$$

Also können sich u und $m^2 \sin\vartheta\,.\,lx$ nur durch eine Konstante unterscheiden, und es ist folglich

$$u = m^2 \sin\vartheta\,.\,lx + C.$$

Um C zu bestimmen, setze man $x = OA = m$, so wird

$$0 = u = m^2 \sin\vartheta\,.\,lm + C,$$

oder

$$C = -m^2 \sin\vartheta\,.\,lm;$$

folglich ist

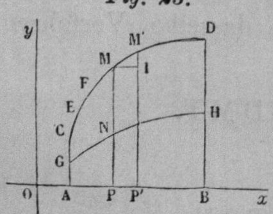
$$u = m^2 \sin\vartheta\,.\,lx - m^2 \sin\vartheta\,.\,lm = m^2 \sin\vartheta\,.\,l\left(\frac{x}{m}\right).$$

Ist $m = 1$ und $\vartheta = 90^0$, so ist die Hyperbel gleichseitig und man erhält $u = lx$, d. h. *die betrachteten Flächen sind die natürlichen Logarithmen der zugehörigen Abscissen.*

Differential eines Kurvenbogen.

212. Will man sich eine klare und bestimmte Vorstellung von der Länge einer Kurve machen, so muss man sie als die Grenze bezeichnen, der sich der Umfang einer in die Kurve eingeschriebenen gebrochenen Linie nähert, wenn ihre Seiten immer kleiner werden und deren Anzahl unendlich wächst. Alsdann muss bewiesen werden, dass dieser Umfang thatsächlich in jedem Falle eine bestimmte Grenze hat.

Fig. 23.



Es sei CD ein Bogen einer ebenen auf rechtwinklige Koordinatenaxen Ox und Oy bezogenen Kurve. In denselben werde der Umfang eines Vieleckes $CEF\,..\,MM'\,..\,D$ eingeschrieben, und es seien $OP = x$, $MP = y$ die Koordinaten des Eckpunktes M und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ die des nächstfolgenden Eckpunktes M'; alsdann ist

$$MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Macht man Δx oder $PP' = 0$, so geht $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in $\frac{dy}{dx}$ über; also muss

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \alpha$$

sein, worin α mit $\varDelta x$ verschwindet, und folglich ist

$$MM' = \varDelta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \alpha \varDelta x.$$

Setzt man in dieser Gleichung für x und y nacheinander die Koordinaten aller Eckpunkte des Vieleckes von C bis D, so erhält man die Längen der entsprechenden Seiten. Bezeichnet man den Umfang der gebrochenen Linie mit P, so wird also

$$P = \sum \left[\varDelta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right] + \sum (\alpha \varDelta x).$$

Um den Grenzwert von P oder die Länge des Bogens C D zu erhalten, beachte man zunächst, dass α eine unendlich kleine Grösse ist, und $\sum \varDelta x$ den endlichen Wert A B hat; somit ist nach einem früher (**16**) bewiesenen Satze

$$\lim \sum (\alpha \varDelta x) = 0.$$

Nun ist $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ eine Funktion von x, die man als die Ordinate N P eines Punktes N auffassen kann, dessen Abscisse denselben Wert x = O P hat. Wird diese Konstruktion für alle Punkte der Kurve C D ausgeführt, so erhält man eine Kurve G N H, deren Gleichung

$$Y = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ist. Also ist

$$\sum \left[\varDelta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right] = \sum (Y \varDelta x),$$

und folglich, da $\lim \sum (\alpha \varDelta x) = 0$,

$$P = \lim \sum (Y \varDelta x).$$

Aber $\sum (Y \varDelta x)$ hat einen bestimmten Grenzwert, der die Fläche A G N H B ist; dieselbe Zahl giebt demnach die Länge des Bogens C D und die Fläche A G N H B.

213. Wird nun die Abscisse O P = x veränderlich angenommen, so die ist Länge des Bogens C M eine Funktion von x, deren Differential bestimmt werden kann.

Ist also C M = s, so hat man, da s = Fl. A G N P ist,

$$ds = Y\,dx = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

oder schliesslich

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Mittels dieses Wertes von s kann man einen sehr einfachen Ausdruck für den Sinus und den Cosinus des Winkels erhalten, den die Tangente im Punkte M mit der x-Axe bildet. Denn wird derselbe mit α bezeichnet, so ist

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{dy}{dx}, \text{ und folglich}$$

$$\sin\alpha = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dy}{ds},\quad \cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds}.$$

Grenze des Verhältnisses eines Bogens zu seiner Sehne. — Neue Sätze über Bogen als Grenzen von Vielecken betrachtet.

214. *Die Grenze des Verhältnisses eines beliebigen Bogens zu seiner Sehne ist die Einheit.*

Denn ist M M' = Δs ein beliebiger Zuwachs des Bogens C M (Fig. 23, S. 164), so ist

$$\frac{\text{arc } MM'}{MM'} = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$$

Verschwindet Δx, so gehen

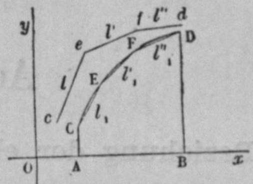
$$\frac{\Delta s}{\Delta x} \text{ und } \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \text{ in } \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

über; folglich wird

$$\lim \frac{\text{arc } MM'}{MM'} = 1.$$

215. Die Punkte c e f ... d und ebenso die ihnen an Zahl gleichen C E F ... D seien Eckpunkte zweier Vielecke. Werden nun die Seiten c e, e f u. s. w. immer mehr gleich den entsprechenden Seiten C E, E F u. s. w., je mehr sich die Punkte C, E, F ... einander nähern, indem gleichzeitig die Anzahl dieser Seiten in das Unendliche wächst; so hat die Linie c e f ... d dieselbe Grenze wie die Linie C E F ... D, nämlich die Länge des Bogens C D.

Fig. 24.



Wir bezeichnen die Seiten von c e f ... d mit $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$, und die entsprechenden Seiten von C E F ... D mit $\alpha', \beta', \gamma' \ldots \lambda'$; mit L die Länge von c e f ... d, und mit L' die von C E F ... D. Ferner sei $\frac{a}{a'}$ das kleinste und $\frac{A}{A'}$ das grösste Verhältnis zwischen den entsprechenden Seiten beider Linien; dann muss das Verhältnis

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \lambda}{\alpha' + \beta' + \gamma' + \ldots + \lambda'}$$

immer zwischen $\frac{a}{a'}$ und $\frac{A}{A'}$ liegen; d. h. es ist

$$\frac{a}{a'} < \frac{L}{L'} < \frac{A}{A'}.$$

Nun ist $\lim \frac{a}{a'} = 1$ und ebenso $\lim \frac{A}{A'} = 1$; folglich ist auch $\lim \frac{L}{L'} = 1$ oder

$$\lim L = \lim L'.$$

216. Ein Satz von derselben Art wie der vorstehende, der analog wie dieser bewiesen werden kann, ist der folgende. Wenn man zwischen zwei Ordinaten C A und D B eine unbegrenzte Zahl von Parallelen zur y-Axe einträgt und zwischen diesen Gerade zieht, die die Kurve berühren; so hat die Summe der letzteren die Länge der gegebenen Kurve zur Grenze, selbst wenn sie keine zusammenhängende gebrochene Linie bilden.

Achtzehnte Lektion.

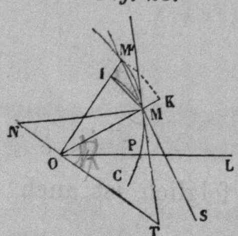
Beziehung der ebenen Kurven auf Polarkoordinaten.

Bestimmung der Tangente. — Längen der Subtangente und Subnormale. — Differential einer Sectorfläche. — Differential eines Kurvenbogens. — Anwendungen. — Bipolare Koordinaten.

Bestimmung der Tangente.

217. Es sei O der Pol, O L die Axe eines Polarkoordinatensystemes und M M′ C eine durch die Gleichung $f(r, \vartheta) = 0$ dargestellte Kurve. Um in dem Punkte M die Tangente M T an die Kurve zu ziehen, genügt es, den Winkel O M T $= \mu$ zu kennen. Es seien nun r und ϑ die Koordinaten des Punktes M, und $r + \varDelta r$, $\vartheta + \varDelta \vartheta$ diejenigen eines auf derselben Kurve liegenden M benachbarten Punktes M′. Wird um O als Mittelpunkt der Bogen M J beschrieben, so ist in dem Dreieck M′ M J

Fig. 25.



$$\frac{\sin JM'M}{\sin M'MJ} = \frac{MJ}{M'J} = \frac{MJ}{\text{arc}\,MJ} \cdot \frac{\text{arc}\,MJ}{M'J} = \frac{MJ}{\text{arc}\,MJ} \cdot \frac{r\,\varDelta\vartheta}{\varDelta r}.$$

Nähert sich der Punkt M′ unbeschränkt dem Punkte M, so geht der Winkel J M′ M in den Winkel O M T $= \mu$ über, der Winkel M′ M J wird $90^0 - \mu$, und man erhält

$$\tan g\,\mu = \frac{r\,d\vartheta}{dr}. \qquad (1)$$

Hieraus folgt

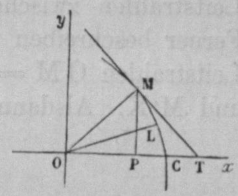
$$\cos \mu = \frac{dr}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}}, \quad \sin \mu = \frac{r\,d\vartheta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2}}. \qquad (2)$$

Da μ zwischen 0 und 180^0 liegt, so muss $\sin \mu$ positiv sein. Dagegen ist $\cos \mu$ positiv oder negativ, je nachdem der Winkel μ spitz oder stumpf ist.

218. Zu der Formel (1) gelangt man auch durch eine Koordinaten-Transformation. Wir wählen die Axe O x des Polarkoordinatensystems zur Abscissen- und eine Senkrechte O y zur Ordinatenaxe. Setzen wir dann O P = x und M P = y, so ist

$$\text{tang}\, OMT = \text{tang}\,(MTx - MOx).$$

Fig. 26.



Es ist aber

$$\text{tang}\, MTx = \frac{dy}{dx} \text{ und tang}\, MOx = \frac{y}{x};$$

folglich wird

$$\text{tang}\, OMT = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy}.$$

Nun ist

$$x = r\cos\vartheta,\quad y = r\sin\vartheta,$$

und demnach

$$dx = dr\cos\vartheta - r\,d\vartheta\sin\vartheta,\quad dy = dr\sin\vartheta + r\,d\vartheta\cos\vartheta.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\text{tang}\, OMT = \frac{r\cos\vartheta\,(dr\sin\vartheta + r\,d\vartheta\cos\vartheta) - r\sin\vartheta\,(dr\cos\vartheta - r\,d\vartheta\sin\vartheta)}{r\cos\vartheta\,(dr\cos\vartheta - r\,d\vartheta\sin\vartheta) + r\sin\vartheta\,(dr\sin\vartheta + r\,d\vartheta\cos\vartheta)},$$

und nach Ausführung aller Reduktionen

$$\text{tang}\, OMT = \frac{r^2\,d\vartheta}{r\,dr} = \frac{r\,d\vartheta}{dr}.$$

Längen der Subtangente und Subnormale.

219. In dem betrachteten Polarkoordinatensysteme (Fig. 25, S. 168) ist die Subtangente gleich der Senkrechten O T, die im Ursprunge des Systems durch den Radius vector O M gezogen und bis zur Tangente M T verlängert ist. Die Subnormale O N liegt auf derselben Geraden und ist gleich dem Abstande des Punktes N, wo letztere durch die Normale M N geschnitten wird, von dem Pole O. Bezeichnen S_t und S_n zwei Gerade, so ist nach diesen Definitionen

$$S_t = OT = r\,\text{tang}\,\mu = \frac{r^2\,d\vartheta}{dr}$$

$$S_n = ON = \frac{r}{\text{tang}\,\mu} = \frac{dr}{d\vartheta}.$$

Differential eines Sektors.

220. Wir bezeichnen mit u (Fig. 25, S. 168) den Sektor POM, der zwischen den beiden Leitstrahlen OP und OM liegt und setzen $\Delta u = MOM'$. Der Bogen MM' sei so klein gewählt, dass die Leitstrahlen zwischen M und M' beständig zu- oder abnehmen. Ferner beschreiben wir um den Punkt M als Mittelpunkt mit den Leitstrahlen $OM = r$ und $OM' = r'$ als Radien die Kreisbogen MJ und M'K. Alsdann ist

$$OMJ < \Delta u < OM'K,$$

oder auch, da $OMJ = \frac{1}{2} r^2 \Delta\vartheta$, $OM'K' = \frac{1}{2} r'^2 \Delta\vartheta$ ist,

$$\frac{1}{2} r^2 \Delta\vartheta < \Delta u < \frac{1}{2} r'^2 \Delta\vartheta, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{2} r^2 < \frac{\Delta u}{\Delta\vartheta} < \frac{1}{2} r'^2.$$

Nun wird beim Übergang zur Grenze $r' = r$; also ist

$$\frac{du}{d\vartheta} = \frac{1}{2} r^2, \text{ oder } du = \frac{1}{2} r^2 d\vartheta.$$

221. Hieraus ergiebt sich eine Folgerung, die oft von Nutzen ist. Oben (**218**) fanden wir

$$\tang OMT = \frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy},$$

und auch (**217**)

$$\tang OMT = \frac{r\,d\vartheta}{dr};$$

also ist

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x\,dx + y\,dy} = \frac{r^2 d\vartheta}{r\,dr}.$$

Da aber

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

so ist

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr,$$

und somit

$$x\,dy - y\,dx = r^2 d\vartheta.$$

Nun ist $\frac{1}{2} r^2 d\vartheta$ das Differential des Sektors LOM; dasselbe ist demnach auch gleich $\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$. Dieses Resultat kann übrigens auch wie folgt erhalten werden. Es ist

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\vartheta; \text{ und folglich}$$

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta},$$

oder

$$x\,dy - y\,dx = \frac{x^2}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta.$$

Nun ist aber

$$x^2 = r^2\cos^2\vartheta,$$

und demnach

$$\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2} r^2 d\vartheta.$$

Differential eines Kurvenbogens.

222. Wir setzen den Kurvenbogen $CM = s$ (Fig. 25, S. 168) und $MM' = \Delta s$ sei seine Zunahme.

In dem Dreiecke $M'MJ$ ist

$$\frac{MM'}{MJ} = \frac{\sin MJM'}{\sin MM'J};$$

demnach wird, da $MJ = 2r\sin\frac{1}{2}\Delta\vartheta$,

$$\frac{MM'}{\operatorname{arc} MM'} = \frac{2r\sin\frac{1}{2}\Delta\vartheta}{\Delta s}\cdot\frac{\sin MJM'}{\sin MM'J},$$

und, beim Übergange zur Grenze,

$$1 = \frac{r\,d\vartheta}{ds}\cdot\frac{1}{\sin\mu}, \text{ oder } ds = \frac{r\,d\vartheta}{\sin\mu}.$$

Also ist [**217**, Formel (2)]

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2},$$

und somit

$$\sin\mu = \frac{r\,d\vartheta}{ds},\ \cos\mu = \frac{dr}{ds}.$$

223. Das Differential des Bogens ist auch durch eine Koordinaten-Transformation zu erhalten. Man hat

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(dr\cos\vartheta - r\,d\vartheta\sin\vartheta)^2 + (dr\sin\vartheta + r\,d\vartheta\cos\vartheta)^2},$$

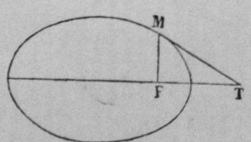
oder

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\vartheta^2}.$$

Anwendungen.

224. 1. Bezieht man die Gleichung einer Ellipse auf Polarkoordinaten, deren Pol der rechtsseitige Brennpunkt der Ellipse und deren Axe die grosse Axe derselben ist, so hat sie die Gestalt

Fig. 27.



$$r = \frac{p}{1 + e\cos\vartheta}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$dr = \frac{e\,p\sin\vartheta\,d\vartheta}{(1 + e\cos\vartheta)^2}, \quad \frac{d\vartheta}{dr} = \frac{(1 + e\cos\vartheta)^2}{e\,p\sin\vartheta};$$

und folglich

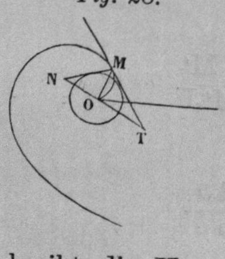
$$\frac{r\,d\vartheta}{dr} = \operatorname{tang} FMT = \frac{1 + e\cos\vartheta}{e\sin\vartheta}.$$

2. *Die archimedische Spirale*

$$r = a\,\vartheta.$$

Die Kurve geht vom Pole der Polarkoordinaten aus und berührt in ihm deren Axe. Um sie zu konstruieren, beschreibt man um den Pol als Mittelpunkt mit der Längeneinheit als Radius einen Kreis, dessen zwischen einem Radius vector und der Axe liegender Bogen die Länge ϑ hat. Trägt man dann diese Länge, mit a multipliziert vom Mittelpunkte aus auf dem Radius vector ab, so erhält man einen Punkt der Kurve.

Fig. 28.



Da r mit ϑ unbegrenzt zunimmt, beschreibt die Kurve eine unendliche Anzahl von Umdrehungen um den Pol.

Man hat $dr = a\,d\vartheta$, und folglich

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{r\,d\vartheta}{dr} = \frac{r\,d\vartheta}{a\,d\vartheta} = \frac{r}{a} = \vartheta,$$

$$S_t = O\,T = r^2 \frac{d\vartheta}{dr} = a\,\vartheta^2,$$

$$S_n = O\,N = \frac{dr}{d\vartheta} = a.$$

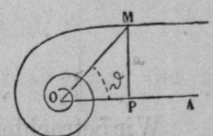
Die Subnormale ist also konstant, was ein sehr einfaches Mittel zur Konstruktion der Tangente giebt.

3. Die *hyperbolische Spirale* führt diesen Namen weil ihre Gleichung

$$r\,\vartheta = a$$

analog derjenigen der Hyperbel $xy = m^2$ ist. Aus der Gleichung der Kurve erhält man $r = \frac{a}{\vartheta}$: für $\vartheta = 0$ wird $r = \infty$; für sehr kleine Werte von ϑ ist r sehr gross und nimmt um so mehr ab, je mehr ϑ wächst; für $\vartheta = \infty$ ist $r = 0$. Die Kurve beschreibt demnach eine unendliche Anzahl Umdrehungen um den Punkt O, ohne ihn jemals erreichen zu können. Derselbe ist also ein asymptotischer Punkt. Die Kurve hat eine Asymptote, die parallel zu O A ist; denn fällt man von einem Punkte M auf der Kurve ein Lot MP auf die Axe, so ist

Fig. 29.



$$M\,P = O\,M \sin\vartheta = r \sin\vartheta = a\,\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}.$$

Nähert sich also ϑ der Null, so nähert sich MP der Grösse a, da $\frac{\sin\vartheta}{\vartheta}$ die Einheit zur Grenze hat.

Man hat demgemäss

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{r\,d\vartheta}{dr} = -\frac{r\,\vartheta^2}{a} = -\vartheta,$$

$$S_t = \frac{r^2\,d\vartheta}{dr} = -r\,\vartheta = -a.$$

Die Subtangente ist also konstant. Diese Eigenschaft bietet ein bequemes Mittel, eine Tangente an einen gegebenen Punkt der Kurve zu ziehen.

4. Die *logarithmische Spirale*

$$r = a\,b^{\vartheta}.$$

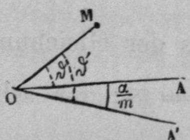
Wählt man eine neue Koordinatenaxe ohne Änderung des Poles, so kann man diese Gleichung auf die Form

$$r = e^{m\vartheta}$$

bringen. Denn setzen wir $a = e^{\alpha}$, $b = e^{m}$, so wird

$$r = e^{\alpha} e^{m\vartheta} = e^{m\vartheta + \alpha} = e^{m\left(\vartheta + \frac{\alpha}{m}\right)}.$$

Fig. 30.

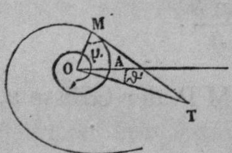


Es sei nun O A die ursprüngliche Axe und M ein Punkt der Kurve. Wählen wir eine neue Axe O A', die mit der früheren den Winkel A O A' $= \frac{\alpha}{m}$ bildet, setzen M O A gleich ϑ, und $\vartheta + \frac{\alpha}{m} = \vartheta'$; so wird die Gleichung der Kurve

$$r = e^{m\vartheta'}.$$

Wir betrachten daher die Gleichung $r = e^{m\vartheta}$. Für $\vartheta = 0$ wird $r = 1$; wächst ϑ unbegrenzt, so wächst r ebenso: die Kurve beschreibt also von dem Punkte A (Fig. 31) ausgehend, für den O A $= 1$ ist, eine unbegrenzte Zahl von Umdrehungen. Für negative Werte von ϑ nimmt r unbegrenzt ab; die Kurve beschreibt also auch von A aus in entgegengesetztem Sinne eine unbegrenzte Zahl Umdrehungen, indem sie sich dem Pole beständig nähert.

Fig. 31.



Man hat $dr = m e^{m\vartheta} d\vartheta = m r d\vartheta$, und folglich

$$\text{tang}\,\mu = \frac{1}{m} = \text{Konst.}$$

Also bei der logarithmischen Spirale bildet die Tangente mit dem durch den Berührungspunkt gehenden Radius vector einen konstanten Winkel.

Die Subtangente ist gleich $\frac{r}{m}$, und die Subnormale gleich $m r$.

Der Endpunkt T der Subtangente beschreibt eine Spirale, die der ursprünglichen gleich ist, aber anders als sie liegt.

Ist $OT = \varrho$, so hat man

$$\varrho = \frac{r}{m} = \frac{e^{m\vartheta}}{m}.$$

Setzt man ferner $TOA = -\vartheta'$, so wird $\vartheta = \vartheta' + \frac{\pi}{2}$, und folglich

$$\varrho = \frac{e^{m\left(\vartheta' + \frac{\pi}{2}\right)}}{m} = \frac{e^{m\left(\vartheta' + \frac{\pi}{2}\right)}}{e^{l m}} = e^{m\left(\vartheta' + \frac{\pi}{2} - \frac{l m}{m}\right)}.$$

Wählt man nun eine neue Axe, die mit der ursprünglichen den Winkel $\frac{\pi}{2} - \frac{l m}{m}$ bildet, und setzt $\vartheta'' = \left(\vartheta' + \frac{\pi}{2} - \frac{l m}{m}\right)$, so ergiebt sich die Gleichung

$$\varrho = e^{m\vartheta''},$$

die eine der ursprünglichen gleiche Spirale darstellt.

Der Endpunkt der Normalen beschreibt ebenfalls eine der ursprünglichen gleiche Spirale.

Bipolare Koordinaten.

225. In diesem Systeme wird die Lage eines Punktes in einer Ebene durch seine Abstände r, r' von zwei festen Punkten A, B bestimmt.

Es sei $f(r, r') = 0$ die Gleichung der Kurve CM, und wir wollen an sie eine Tangente im Punkte M ziehen.

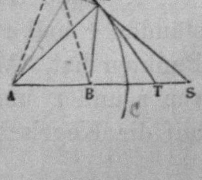
Dazu betrachten wir die Sekante M'MS. Ziehen wir MH senkrecht auf AM', und setzen

$$AM = r,\ BM = r',\ AM' = r + \Delta r,\ BM' = r' + \Delta r';$$

$$MAM' = \Delta\vartheta,\ \text{arc}\, MM' = \Delta s,\ AMT = \alpha,\ BMT = \beta;$$

so ist

Fig. 32.



$$\cos AM'M = \frac{M'H}{MM'} = \frac{M'H}{\Delta s} \cdot \frac{\text{arc}\, MM'}{MM'},$$

oder auch

$$\cos AM'M = \frac{\Delta r + 2r\sin^2\frac{1}{2}\Delta\vartheta}{\Delta s} \cdot \frac{\text{arc}\, MM'}{MM'}.$$

Nun ist

$$\lim \frac{2\,r \sin^2 \frac{1}{2} \varDelta \vartheta}{\varDelta s} = 0,\ \lim \mathrm{A\,M'M} = \alpha,\ \lim \frac{\mathrm{arc\,MM'}}{\mathrm{MM'}} = 1;$$

folglich ist

$$\cos \alpha = \frac{d\,r}{d\,s},$$

und ebenso

$$\cos \beta = \frac{d\,r'}{d\,s}.$$

Man hat also

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{d\,r}{d\,r'},$$

wodurch die Tangente M T bestimmt wird.

226. Wählt man als feste Punkte die beiden Brennpunkte einer Ellipse, so wird die Gleichung der letzteren

$$r + r' = 2\,a.$$

Hieraus folgt $d\,r + d\,r' = 0$, und folglich $\frac{d\,r}{d\,r'} = -1$; somit wird

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = -1,$$

oder

$$\cos \alpha = -\cos \beta.$$

Also *die Leitstrahlen eines Ellipsenpunktes bilden mit der Tangente, auf ein und derselben Seite der letzteren zwei Supplementwinkel.* Für die Hyperbel fände man ebenso $\cos \alpha = \cos \beta$. Für eine Kurve mit der Gleichung $r \pm m\,r' = \alpha$ würde sich $\cos \alpha = \mp m \cos \beta$ ergeben.

Übungen.

1. Eine Kurve ist durch eine Beziehung zwischen den Abständen r und r′ gegeben, die jeder ihrer Punkte von zwei festen Punkten hat. Man soll das Differential ihres Bogens als Funktion von r und r′ und von deren Differentialen darstellen. Anwendung auf die Kegelschnitte.

Auflösung.

$$ds^2 = \frac{4\,r\,r'[r\,r'(d\,r^2 + d\,r'^2) - (r^2 + r'^2 - a^2)\,d\,r\,d\,r']}{(r + r' + a)\,(r + r' - a)\,(a + r - r')\,(a + r' - r)};$$

a bezeichnet den Abstand der beiden Pole.

2. Eine Kurve ist durch eine Beziehung zwischen den Winkeln ϑ und ϑ' gegeben, die die von irgend einem Punkte M der Kurve nach zwei festen Punkten A B gezogenen Geraden mit der Geraden A B bilden.

Man soll die Tangente der Kurve bestimmen und das Differential ihres Bogens als Funktion ven ϑ, ϑ' und von deren Differentialen darstellen.

Die Resultate sind auf die Kurve anzuwenden, welche durch den Schnittpunkt zweier Geraden entsteht, die sich mit gleichförmiger Rotationsgeschwindigkeit um zwei feste Punkte drehen.

Auflösung.

Sind μ und μ' die Winkel, welche die Normale mit den Leitstrahlen M A und M B bildet, so ist

$$\sin^2\mu + \sin^2\mu' - 2\sin\mu\,\sin\mu'\cos(\vartheta + \vartheta') - \sin^2(\vartheta + \vartheta') = 0,$$

$$ds = \frac{a}{\sin^2(\vartheta + \vartheta')}\sqrt{\sin^2\vartheta'\,d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\vartheta'^2 - 2\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\vartheta + \vartheta')\,d\vartheta\,d\vartheta'}.$$

Sind in dem besonderen angegebenen Falle n und n' die Winkelgeschwindigkeiten der beiden Bewegungen, so ist

$$\frac{\sin\mu}{\sin\mu'} = \frac{n\sin\vartheta'}{n'\sin\vartheta}.$$

3. Die Descartischen Ovalen, die in bipolaren Koordinaten durch die Gleichungen

$$r + n\,r' = \alpha$$
$$r' - n\,r = \beta$$

dargestellt werden, schneiden sich bei beliebigen Werten von α und β unter einem rechten Winkel.

Neunzehnte Lektion.

Berührungen verschiedener Ordnung zwischen ebenen Kurven. — Die Ordnung der Berührung ist unabhängig von der Wahl der Axen. — Verschiedener Charakter der Berührungen von gerader und von ungerader Ordnung. — Die oskulierenden Kurven. — Der oskulierende Kreis. — Anwendung auf die Kegelschnitte.

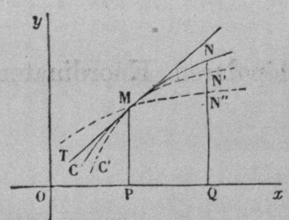
Berührungen verschiedener Ordnung zwischen ebenen Kurven.

227. Es seien CMN und C′M′N′ zwei Kurven, und

$$y = f(x), \quad y' = \varphi(x)$$

deren Gleichungen, worin y und y′ explicite oder implicite Funktionen von x sind. Wir nehmen an, dass beide Kurven einen gemeinsamen Punkt M haben, und wollen ihre Koordinaten QN und QN′ vergleichen, die in der Nähe von M zu ein und derselben Abscisse gehören.

Fig. 33.



Setzt man OP = x, PQ = h, so wird

$$QN = f(x+h), \quad QN' = \varphi(x+h);$$

also

$$NN' = f(x+h) - \varphi(x+h),$$

und nach dem Taylorschen Satze

$$NN' = y - y' + h\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y'}{dx^2}\right) + R.$$

Man kann nun R auf die Form $\frac{h^2}{1.2}\alpha$ bringen, worin α mit h verschwindet, und da y = y′, indem der Punkt M beiden Kurven gemeinsam ist; so folgt

$$NN' = h\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy'}{dx}\right) + \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^2y'}{dx^2} + \alpha\right).$$

Nehmen wir ferner an, dass beide Kurven im Punkte M eine

gemeinsame Tangente MT haben, so wird auch $\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx}$, und wir erhalten

$$NN' = \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 y'}{dx^2} + \alpha\right).$$

Es ist leicht zu beweisen, dass die Kurve MN' der Kurve MN näher als irgend eine andere Kurve MN'' kommt, die ebenfalls durch den Punkt M geht, aber MT nicht zur Tangente hat.

Denn sei $y'' = \psi(x)$ die Gleichung von MN'', so hat man

$$NN'' = h\left(\frac{dy}{dx} - \frac{dy''}{dx} + \beta\right),$$

worin β mit h verschwindet; folglich ist

$$\frac{NN'}{NN''} = \frac{\frac{h}{1.2}\left(\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 y'}{dx^2} + \alpha\right)}{\frac{dy}{dx} - \frac{dy''}{dx} + \beta}.$$

Nähert sich h der Null, so wird demnach

$$\lim \frac{NN'}{NN''} = 0.$$

Für Punkte, die hinlänglich nahe bei M liegen, ist also NN' kleiner als NN''; die Kurve MN' liegt folglich zwischen MN und MN''.

228. Dieses Ergebnis können wir verallgemeinern. Angenommen, es sei

$$y' = y,\ \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y'}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n}, \tag{a}$$

so ist

$$NN' = \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}\left(\frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} - \frac{d^{n+1} y'}{dx^{n+1}} + \alpha\right),$$

worin α gleichzeitig mit h Null wird.

Nun lässt sich beweisen, dass in hinlänglich kleiner Entfernung von M die Kurve MN', die den Bedingungen (a) genügt, der Kurve MN näher kommt, als irgend eine andere Kurve MN'', die sie nicht sämtlich erfüllt.

Denn sei $y'' = \psi(x)$ die Gleichung von MN'' und nehmen wir an, dass die m ersten Ableitungen von y'' gleich den m ersten Ableitungen von y sind, wobei $m < n$ ist, so wird

$$QN - QN'' = NN'' = \frac{h^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)}\left(\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} - \frac{d^{m+1} y''}{dx^{m+1}} + \beta\right),$$

worin β zugleich mit h verschwindet.

Demnach ist

$$\frac{NN'}{NN''}=\frac{h^{n-m}}{(m+2)(m+3)\dots(n+1)}\cdot\frac{\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}-\frac{d^{n+1}y'}{dx^{n+1}}+\alpha}{\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}-\frac{d^{m+1}y''}{dx^{m+1}}+\beta}.$$

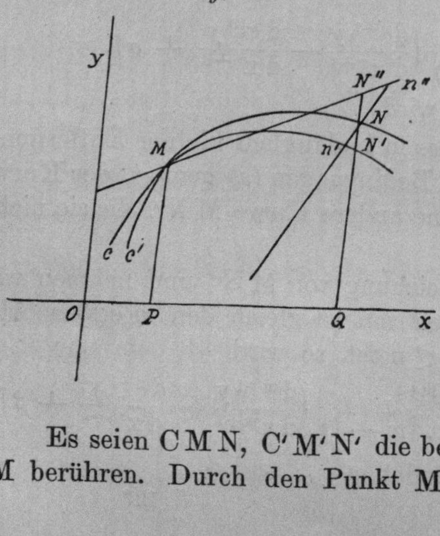
Da nun α und β sich zugleich mit h der Null nähern, so besteht für hinlänglich kleine h, zwischen dem Quotienten $\frac{NN'}{NN''}$ und h^{n-m} eine entschiedene Proportionalität; ersterer kann demnach, da $n > m$ ist, kleiner als jede gegebene Grösse werden.

Drückt man die Bedingung (a) so aus, dass man sagt, zwischen den beiden Kurven MN und MN′ besteht eine Berührung von der n^{ten} Ordnung, und demgemäss zwischen den Kurven MN und MN″ eine solche von der m^{ten} Ordnung, so können die vorstehend erhaltenen Resultate in folgender Weise zusammengefasst werden: *Durch einen gemeinsamen Punkt zweier Kurven, zwischen denen eine Berührung n^{ter} Ordnung besteht, kann keine Kurve, die mit einer von ihnen eine Berührung von niedrigerer Ordnung als der n^{ten} hat, so gezogen werden, dass sie zwischen beiden liegt.*

Die Ordnung der Berührung ist unabhängig von der Wahl der Axen.

229. *Die Ordnung der Berührung ist von der Richtung der Axen unabhängig*, wofern die Ordinatenaxe nicht der gemeinsamen Tangente beider Kurven parallel ist.

Fig. 34.



Diesen Satz könnte man beweisen, indem man die allgemeinen Formeln der Koordinaten-Transformation anwendet und zeigt, dass die Ableitungen der Ordinaten beider Kurven auch in dem neuen Systeme bis zur n^{ten} Ordnung gleich bleiben, wenn n die Ordnung der Berührung in dem ursprünglichen Systeme war. Doch gelangt man durch geometrische Betrachtungen einfacher zum Ziele.

Es seien CMN, C′M′N′ die beiden Kurven, die sich im Punkte M berühren. Durch den Punkt M ziehen wir eine Gerade Mn″,

die von der Tangente im Punkte M verschieden, im übrigen aber beliebig ist. Ihre Gleichung sei

$$y'' = a x + b.$$

Ferner seien

$$y = f(x), \; y' = \varphi(x)$$

die Gleichungen der beiden Kurven. Wir betrachten nun die Ordinaten dieser drei Linien, die einem auf der ersten angenommenen Punkte N entsprechen.

Es ist wie vorhin

$$N N' = \frac{h^{n+1}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n+1)} \left(\frac{d^{n+1} y}{d x^{n+1}} - \frac{d^{n+1} y'}{d x^{n+1}} + \alpha \right),$$

und da, nach der Voraussetzung, die durch den Punkt M gezogene Gerade von der Tangente verschieden ist, so ist ferner

$$N N'' = h \left(\frac{d y}{d x} - \frac{d y''}{d x} + \beta \right) = h \left(\frac{d y}{d x} - a + \beta \right).$$

Demnach wird

$$\frac{N N'}{(N N'')^{n+1}} = \frac{\frac{d^{n+1} y}{d x^{n+1}} - \frac{d^{n+1} y'}{d x^{n+1}} + \alpha}{\left(\frac{d y}{d x} - a + \beta \right)^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n+1)}.$$

Da nun α und β zugleich mit h Null werden, so nähert sich, wie man sieht, der Quotient $\frac{N N'}{(N N'')^{n+1}}$ einer endlichen Grenze.

Ist also die Berührung von der n^{ten} Ordnung, so wird der Quotient $\frac{N N'}{N N''}$ ein unendlich Kleines n^{ter} Ordnung. Offenbar gilt auch das Umgekehrte.

230. Nun beziehen wir die Kurve auf andere Axen, und legen durch den Punkt N eine Parallele zu der neuen y-Axe, die die Kurve $y' = \varphi(x)$ im Punkte n' und die Gerade $M n''$ im Punkte n'' schneide. Um nun zu beweisen, dass die Ordnung der Berührung sich nicht geändert hat, genügt es zu zeigen, dass das Verhältnis $\frac{N n'}{(N n'')^{n+1}}$ sich einer endlichen Grenze nähert. Denn alsdann ist $\frac{N n'}{N n''}$ ein unendlich Kleines n^{ter} Ordnung und die Berührung bleibt demnach von der Ordnung n.

Zieht man N′n′, so ist in dem Dreieck N N′ n′

$$\frac{N N'}{N n'} = \frac{\sin n'}{\sin N'}.$$

Nähert sich N unbegrenzt dem Punkte M, so bewegt sich der Punkt N′ und ebenso der Punkt n′ zu N hin, und folglich werden N′ und n′ an der Grenze zusammenfallen. Der Bogen n′ N′ rückt also zu der Tangente im Punkte M hin, und das Verhältnis zwischen den Sinus der Winkel n′ und N′ hat demnach eine endliche Grenze. Ferner bleibt das Verhältnis $\frac{N N''}{N n''}$ konstant, wenn der Punkt N sich dem Punkte M nähert; da das veränderliche Dreieck N n″ N″ immer sich selbst ähnlich bleibt.

Man hat nun

$$N N' = N n' \frac{\sin n'}{\sin N'}, \quad N N'' = N n'' \frac{\sin n''}{\sin N''},$$

und folglich

$$\frac{N N'}{(N N'')^{n+1}} = \frac{N n'}{(N n'')^{n+1}} \cdot \frac{\frac{\sin n'}{\sin N'}}{\left(\frac{\sin n''}{\sin N''}\right)^{n+1}}.$$

Der Quotient $\frac{N n'}{(N n'')^{n+1}}$ nähert sich also einer endlichen Grenze, was zu beweisen war.

Geometrischer Charakter der Berührungen von gerader und von ungerader Ordnung.

231. Besitzen die beiden Kurven C M N und C′ M′ N′, deren Gleichungen bezw.

$$y = f(x) \text{ und } y' = \varphi(x)$$

sind, im Punkte M (x, y) eine Berührung n^{ter} Ordnung, so werden die folgenden n + 1 Bedingungen erfüllt:

$$y' = y, \quad \frac{d y'}{d x} = \frac{d y}{d x}, \quad \frac{d^2 y'}{d x^2} = \frac{d^2 y}{d x^2}, \ldots, \frac{d^n y'}{d x^n} = \frac{d^n y}{d x^n},$$

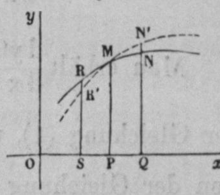
und, wie wir sahen, ist dann

$$N N' = Q N - Q N' = \frac{h^{n+1}}{1 . 2 \ldots (n+1)} \left(\frac{d^{n+1} y}{d x^{n+1}} - \frac{d^{n+1} y'}{d x^{n+1}} + \alpha\right).$$

Wir haben aber bisher nur den absoluten Wert von N N' oder Q N — Q N' berücksichtigt; nun wollen wir auch das Vorzeichen dieser Differenz in Betracht ziehen.

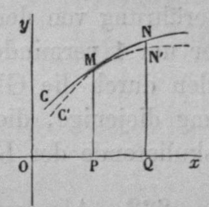
Ist n gerade oder n + 1 ungerade, so ändert h^{n+1} und folglich auch Q N — Q N' sein Vorzeichen mit h, woraus zu schliessen, dass diejenige der beiden Kurven, die links vom Berührungspunkte unter der anderen liegt, sich rechts von ihm über ihr befindet, so dass die beiden Kurven, wie die Figur 35 zeigt, sich in diesem Punkte kreuzen.

Fig. 35.



Ist n ungerade oder n + 1 gerade, so ändert sich für hinlänglich kleine h das Zeichen von Q N — Q N' nicht mit dem von h; d. h. in der Nähe des Punktes M kreuzen sich die beiden Kurven nicht.

Fig. 36.



Also, *wenn zwei Kurven eine gegenseitige Berührung von ungerader Ordnung haben, so umfasst die eine die andere; ist dagegen ihre Berührung von gerader Ordnung, so kreuzen sie sich im Berührungspunkte.*

Eine gerade Linie, die eine Kurve berührt, hat im allgemeinen mit letzterer eine Berührung erster, d. h. ungerader Ordnung; demnach liegt sie bei bem Berührungspunkte vollständig auf der einen Seite der Kurve.

Ist dagegen der Berührungspunkt ein Wendepunkt, so wird die Ordnung der Berührung gerade, und die Tangente kreuzt die Kurve.

Die oskulierenden Kurven.

232. Es sei

$$\Phi\,(x, y', a, b, c, \ldots l) = 0 \qquad (1)$$

eine Gleichung, die n + 1 willkürliche Konstanten einschliesst und die, je nach den Werten, die diesen Konstanten beigelegt werden, einer unendlichen Anzahl verschiedener Kurven zukommt. Über die unbestimmten Grössen a, b, c, ... l kaun man in der Weise verfügen, dass die Kurve (1) mit einer anderen, durch ihre Gleichung

$$y = f(x) \qquad (2)$$

gegebenen Kurve in einem gegebenen Punkte (x, y) eine Berührung von bestimmter, höchstens n^{ter} Ordnung hat.

Ist die Berührung von n^{ter} Ordnung, so werden die folgenden $n + 1$ Bedingungen erfüllt:

$$y' = y,\ \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny'}{dx^n} = \frac{d^ny}{dx^n}. \qquad \text{(a)}$$

Man erhält $\frac{dy'}{dx}, \frac{d^2y'}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny'}{dx^n}$ durch n-malige Differentiation der Gleichung (1), und $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ durch n-malige Differentiation der Gleichung (2). Die $n + 1$ Gleichungen (a) bestimmen die $n + 1$ unbekannten Konstanten a, b, c ... als Funktionen der Koordinaten des Berührungspunktes und der Coëfficienten der Gleichung (2).

Werden die Konstanten in der Weise bestimmt, dass man die Berührung von der höchsten möglichen Ordnung erhält, die gleich der um 1 verminderten Anzahl der Konstanten ist, so heisst unter allen durch die Gleichung (1) dargestellten Kurven derselben Gattung diejenige, die diesen Werten der Konstanten entspricht, die oskulierende der Kurve $y = f(x)$.

233. Als erstes Beispiel betrachten wir die Gerade

$$y' = ax + b, \qquad (1)$$

und die Kurve $y = f(x)$.

Da die Gleichung der Geraden nur zwei willkürliche Konstanten enthält, kann nur eine Berührung erster Ordnung stattfinden. Dazu sind die beiden Gleichungen zu erfüllen

$$y' = y \text{ und } \frac{dy'}{dx} \text{ oder } a = \frac{dy}{dx}.$$

Setzt man in der Gleichung (1) y an die Stelle von y', so erhält man

$$y = ax + b,$$

woraus folgt

$$b = y - ax = y - \frac{dy}{dx}x.$$

Die Gleichung (1) erhält dann die Form

$$y' = \frac{dy}{dx}x' + y - \frac{dy}{dx}x, \text{ oder } y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x),$$

und das ist die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y).

Der oskulierende Kreis.

234. Die vorstehenden Erörterungen wenden wir nun auch auf den Kreis an. Es sei in rechtwinkligen Koordinaten

$$y = f(x)$$

die Gleichung einer Kurve. Da die allgemeine Gleichung des Kreises drei willkürliche Konstanten enthält, so hat der oskulierende Kreis mit der gegebenen Kurve eine Berührung zweiter Ordnung. Es sei also

$$(x - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 = \varrho^2 \tag{1}$$

die Gleichung dieses unbekannten Kreises.

Man erhält hieraus durch zweimalige Differentiation

$$x - \xi + (y' - \eta)\frac{dy'}{dx} = 0, \tag{2}$$

$$1 + \frac{dy'^2}{dx^2} + (y' - \eta)\frac{d^2y'}{dx^2} = 0. \tag{3}$$

Ferner gelten die Bedingungen

$$y' = y,\ \frac{dy'}{dx} = \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y'}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}:$$

setzt man daher in den Gleichungen (1), (2), (3)

$$y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2} \text{ bezw. für } y',\ \frac{dy'}{dx},\ \frac{d^2y'}{dx^2},$$

so erhält man zur Bestimmung von ξ, η, ϱ die folgenden drei Gleichungen

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \varrho^2, \tag{4}$$

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{5}$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \tag{6}$$

worin x und y die Koordinaten des Berührungspunktes sind.

Hieraus ergiebt sich

$$\eta - y = \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},\quad \xi - x = -\frac{\frac{dy}{dx}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

und

$$\varrho^2 = \frac{\left(1+\frac{d\,y^2}{d\,x^2}\right)^2}{\left(\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\right)^2}\left(1+\frac{d\,y^2}{d\,x^2}\right) = \frac{\left(1+\frac{d\,y^2}{d\,x^2}\right)^3}{\left(\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\right)^2}$$

oder

$$\varrho = \pm\frac{\left(1+\frac{d\,y^2}{d\,x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}. \tag{7}$$

235. Da der Zähler dieses Ausdruckes positiv ist, so muss man, um den absoluten Wert von ϱ zu erhalten, das Zeichen $+$ oder $-$ wählen, je nachdem $\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$ positiv oder negativ ist.

Die Gleichung (6) zeigt, dass $\eta - y$ und $\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$ immer dasselbe Vorzeichen haben, und da $\eta - y$ die Differenz zwischen der Ordinate des Mittelpunktes und der des Berührungspunktes ist; so folgt, dass der Mittelpunkt des oskulierenden Kreises immer in der Konkavität der Kurve liegt.

Da die Kurve und der oskulierende Kreis dieselbe Tangente haben, so liegt der Mittelpunkt dieses Kreises auf der im Punkte (x, y) an die Kurve gezogenen Normale. Dieses ergiebt sich auch aus der Gleichung (5), wenn man sie auf die Form bringt

$$\frac{y-\eta}{x-\xi}\cdot\frac{d\,y}{d\,x} = -1; \tag{8}$$

denn hiernach steht die Gerade, die vom Berührungspunkt nach dem Mittelpunkt des oskulierenden Kreises gezogen ist, senkrecht auf der gemeinsamen Tangente.

Da der oskulierende Kreis mit der Kurve eine Berührung zweiter, also gerader Ordnung besitzt, so muss er die Kurve kreuzen; abgesehen von gewissen besonderen Punkten, wo die Berührung von höherer als der zweiten Ordnnng ist. Ist in letzterem Falle die Berührung von ungerader Ordnung, so liegen die Kurve und ihr oskulierender Kreis beide auf derselben Seite ihrer gemeinsamen Tangente.

Den oskulierenden Kreis nennt man häufig auch *Krümmungs-*

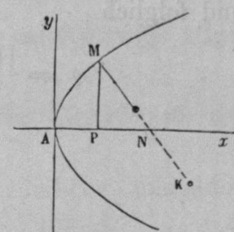
kreis, seinen Mittelpunkt und Radius *Krümmungs-Mittelpunkt* und *Krümmungsradius*, wofür wir den Grund später erfahren werden.

236. Als Beispiel stellen wir uns die Aufgabe, den Krümmungsradius eines Kegelschnittes in einem beliebigen Punkte zu bestimmen.

Wird diese Kurve auf eine ihrer Axen und auf die Tangente im Scheitel bezogen, so ist ihre Gleichung

$$y^2 = 2\,p\,x + q\,x^2. \tag{1}$$

Fig. 37.



Durch zweimalige Differentiation derselben erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p + qx}{y},$$

$$y\,\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = q,$$

und wenn man für $\frac{dy}{dx}$ seinen Wert einsetzt,

$$y\,\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{p^2 + 2\,p\,q\,x + q^2x^2}{y^2} = q,$$

oder schliesslich

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\,\frac{p^2}{y^3}.$$

Also ist dem absoluten Betrage nach

$$\varrho = \frac{y^3\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{p^2}. \tag{2}$$

Der Zähler von ϱ ist der Kubus der Normalen M N. Denn aus dem rechtwinkligen Dreiecke M N P erhält man

$$\overline{MN}^2 = n^2 = y^2 + y^2\,\frac{dy^2}{dx^2}, \text{ oder } n = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

und folglich

$$y^3\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = n^3.$$

Also ist

$$\varrho = \frac{n^3}{p^2}; \tag{3}$$

d. h. *in jedem Punkte eines Kegelschnittes ist der Krümmungsradius gleich dem Kubus der Normalen, dividiert durch das Quadrat des halben Parameters.*

Der Wert von ϱ kann übrigens leicht als Funktion allein von der Abscisse des Punktes M erhalten werden. Denn, da

$$y^2 = 2px + qx^2 \text{ und } y\frac{dy}{dx} = p + qx$$

ist, so wird

$$n^2 = 2px + qx^2 + (p + qx)^2 = (q + q^2)x^2 + 2pqx + 2px + p^2,$$

und folglich

$$\varrho = \frac{[(q + q^2)x^2 + 2p(1 + q)x + p^2]^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Zwanzigste Lektion.

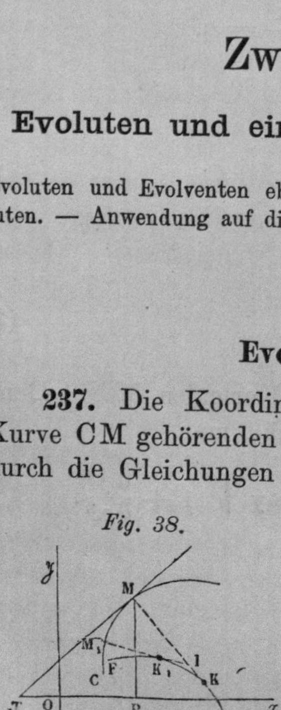
Evoluten und einhüllende Kurven ebener Kurven.

Evoluten und Evolventen ebener Kurven. — Allgemeine Eigenschaften der Evoluten. — Anwendung auf die Parabel, Ellipse und Hyperbel. — Einhüllende Kurve einer beweglichen Kurve.

Evoluten und Evolventen.

237. Die Koordinaten ξ und η des zu dem Punkte M der Kurve CM gehörenden Krümmungsmittelpunktes sind, wie wir sahen durch die Gleichungen gegeben

Fig. 38.



$$x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad (1)$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \qquad (2)$$

Die Krümmungsmittelpunkte K, K_1 ... bilden eine neue Kurve F F', die die Evolute der Kurve C M heisst, während letztere die

Evolvente von F F' genannt wird. Den Grund dieser Bezeichnungen werden wir alsbald kennen lernen.

Da die Gleichungen (1) und (2) in Verbindung mit der Gleichung der gegebenen Kurve C M

$$f(x, y) = 0 \tag{3}$$

die Koordinaten ξ und η des zu dem Punkte M gehörenden Krümmungsmittelpunktes K bestimmen, so erhält man die Gleichung des Ortes der Punkte K durch Elimination von x und y zwischen den Gleichungen (1), (2) und (3).

Allgemeine Eigenschaften der Evoluten.

238. Die Evolute einer Kurve besitzt sehr merkwürdige allgemeine Eigenschaften.

Die Normalen der Evolvente berühren die Evolute in den Krümmungsmittelpunkten.

Denn wählt man x zur unabhängigen Veränderlichen und differenziert die Gleichung (1), indem man darin y, $\frac{dy}{dx}$, ξ und η als Funktionen von x betrachtet, so erhält man

$$dx - d\xi + (dy - d\eta)\frac{dy}{dx} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

oder

$$dx\left[1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2}\right] - d\xi - d\eta\frac{dy}{dx} = 0,$$

oder auch wegen der Gleichung (2)

$$d\xi + d\eta\frac{dy}{dx} = 0,$$

und schliesslich

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{dx}{dy}. \tag{4}$$

Diese Gleichung zeigt, dass die an die Evolute im Punkte K gezogene Tangente senkrecht auf der an die Kurve C M im Punkte M gezogenen Tangente steht. Die Gerade K M ist also eine Tangente der Evolute.

239. Aus dieser Eigenschaft ergiebt sich unmittelbar der folgende Satz: *die Evolute einer Kurve ist der Ort der successiven Punkte, worin sich die Normalen der Kurve schneiden.* Denn es sei

J der Punkt, worin sich die beiden Normalen MK und $M_1 K_1$, die die Evolute in den Punkten K und K_1 berühren, schneiden. Nähert sich nun der Punkt M_1 unbeschränkt dem Punkte M, so nähert sich die Normale $M_1 K_1$ der Normale MK und der Winkel K_1 JK wächst bis zu dem Grenzwerte von zwei Rechten. Also ist K_1 K die grösste Seite in dem Dreiecke K_1 JK, und da diese die Null zum Grenzwerte hat, so gilt dasselbe auch für JK. Der Punkt J bewegt sich demnach auf der festen Geraden MK so, dass er sich unbeschränkt dem Punkte K nähert, den man als den Schnittpunkt der Normalen MK und der ihr unendlich naheliegenden Normalen betrachten kann.

240. *Die Differenz zwischen zwei Krümmungsradien MK und $M_1 K_1$ ist gleich dem Bogen $K_1 K$ der Evolute der zwischen den entsprechenden beiden Krümmungsmittelpunkten liegt.*

Zum Beweise dieses Satzes differenzieren wir die Gleichung

$$\varrho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2,$$

indem wir y, ξ, η und ϱ als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x betrachten. Man erhält dann

$$\varrho\, d\varrho = (x-\xi)(dx - d\xi) + (y-\eta)(dy - d\eta),$$

oder

$$\varrho\, d\varrho = dx\left[x - \xi + (y-\eta)\frac{dy}{dx}\right] - (x-\xi)\, d\xi - (y-\eta)\, d\eta,$$

und hieraus bei Berücksichtigung der Gleichung (1), **273**

$$\varrho\, d\varrho = -(x-\xi)\, d\xi - (y-\eta)\, d\eta,$$

und, wenn man den Bogen FK mit σ bezeichnet,

$$\frac{d\varrho}{d\sigma} = \frac{\xi - x}{\varrho} \cdot \frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{\eta - y}{\varrho} \cdot \frac{d\eta}{d\sigma}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber der Cosinus des Winkels, den die Gerade MK mit der im Punkte K an die Evolute gezogenen Tangente bildet, und da dieser Winkel Null ist, so ist sein Cosinus gleich der Einheit, und es wird

$$d\varrho = d\sigma.$$

Folglich ist, wenn C eine Konstante bezeichnet,

$$\varrho = \sigma + C,$$

und ebenso

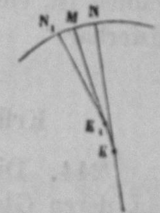
$$\varrho_1 = \sigma_1 + C;$$

also ist

$$\varrho - \varrho_1 = \sigma - \sigma_1 = \text{arc FK} - \text{arc FK}_1 = \text{arc KK}_1.$$

241. Man kann diese Gleichung auch aus der Thatsache folgern, dass die Evolute der Ort der successiven Punkte ist, worin sich die an die gegebene Kurve gezogenen Normalen schneiden. Denn setzt man für einen kleinen Bogen KK_1 der Evolute seine Sehne, und verlängert die letztere, bis sie die Kurve in M schneidet, so wird die Gerade KM sehr wenig von der durch den Punkt K gezogenen Normalen KN verschieden sein, und ebenso wird sich K_1M sehr wenig von der durch den Punkt K_1 gezogenen Normalen K_1N_1 unterscheiden: also ist, bei Vernachlässigung der unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung

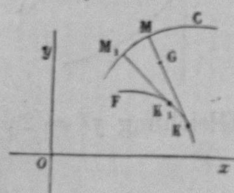
Fig. 39.



$$KK_1 = KM - K_1M = KN - K_1N_1.$$

Eben infolge dieser Eigenschaft hat die Kurve FK den Namen Evolute erhalten.

Fig. 40.



Denken wir uns nämlich, ein Faden sei zum Teil um FK aufgewickelt, und der Rest in Richtung der Tangente K_1M_1 gespannt, so dass er in M_1 auf der Kurve CM endigt; so wird das Ende, wenn man den Faden abwickelt, indem er beständig gespannt bleibt, die Kurve CM beschreiben. Denn angenommen, der geradlinige Teil des Fadens habe die Richtung KM und endige in G, so ist

$$GK = M_1K_1 + K_1K;$$

weil K_1K der abgewickelte Teil ist. Ebenso ist aber auch

$$MK = M_1K_1 + K_1K;$$

folglich ist

$$GK = MK,$$

und G fällt mit dem Punkte M der Kurve CM zusammen. Das Ende des Fadens beschreibt also die Kurve CM.

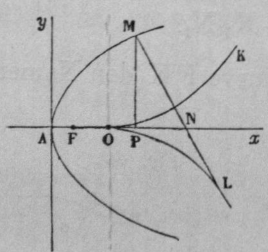
242. Eine einzige Kurve FK besitzt unendlich viel Evolventen, und man braucht, um sie zu beschreiben, den Faden nur um eine beliebige Grösse zu verlängern oder zu verkürzen. Die Tangenten der Kurve FK sind Normalen zu allen Evolventen; letztere haben folglich dieselben Normalen und dieselben Krümmungsmittelpunkte, und da sie auf ihren Normalen konstante Längen abschneiden, kann man mittels einer Evolvente alle übrigen erhalten.

243. Ist eine Kurve algebraisch, so sind nach den oben entwickelten Formeln auch die Radien ihrer Krümmungskreise durch algebraische Ausdrücke darzustellen; folglich hat dann auch ein Bogen der Evolute, da er gleich der Differenz zweier Krümmungsradien ist, einen algebraischen Ausdruck, und die Kurve ist rektifizierbar.

Krümmungsradius und Evolute der Parabel.

244. Die vorstehende Theorie wenden wir nun auf die Parabel an, deren Gleichung

Fig. 41.



$$y^2 = 2px$$

ist. Bezeichnet n die Normale MN, und ϱ den Krümmungsradius im Punkte M, so war (**236**)

$$\varrho = \frac{n^3}{p^2}.$$

Will man ϱ als Funktion der Koordinaten von M darstellen, so muss man die Gleichung $y^2 = 2px$ zweimal differenzieren; man erhält

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Also ist seinem absoluten Betrage nach

$$\varrho = \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{p^2}{y^3}} = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Um die Gleichung der Evolute zu erhalten, setzen wir die Werte von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ in die Gleichungen

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

dann wird

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{p}{y} = 0, \quad 1 + \frac{p^2}{y^2} - (y - \eta)\frac{p^2}{y^3} = 0.$$

Durch Elimination von x und y zwischen diesen Gleichungen und derjenigen der Kurve gelangt man zu der Gleichung der Evolute. Aus der zweiten Gleichung erhält man

$$1 + \frac{p^2}{y^2} - \frac{p^2}{y^2} + \frac{p^2 \eta}{y^3} = 0, \text{ und folglich}$$

$$\eta = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Setzt man diesen Wert von η in die erste Gleichung ein, so wird

$$x - \xi + p + \frac{y^2}{p} = 0, \text{ und somit}$$

$$\xi - p = 3x.$$

Wir haben also

$$y^3 = -p^2 \eta, \quad x = \frac{1}{3}(\xi - p), \quad y^2 = 2px,$$

und folglich

$$y^6 = p^4 \eta^2,$$

oder auch

$$y^6 = (2px)^3 = \left[\frac{2}{3} p (\xi - p)\right]^3.$$

Also ist

$$p^4 \eta^2 = \frac{8}{27} p^3 (\xi - p)^3,$$

und

$$\eta^2 = \frac{8}{27p} (\xi - p)^3.$$

Verschiebt man die Ordinatenaxe parallel mit sich selbst bis zum Punkte O, so dass A O = p, so erhält die vorstehende Gleichung die Form $\eta^2 = \frac{8}{27p} \xi'^3$ oder einfach

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{8}{27p}} \cdot \xi^{\frac{3}{2}}.$$

Diese Kurve hat die Form K O L (Fig. 41, S. 192); sie ist in Bezug auf die Abscissenaxe symmetrisch, was auch a priori klar ist, und dehnt sich auf der Seite der positiven x bis in die Unendlichkeit aus.

Durch Differentiation findet man

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{8}{27\,p}}\cdot\xi^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{8}{27\,p}}\cdot\xi^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6p}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\xi}}\,.$$

Das Vorzeichen von $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ ist gleich dem von η; die Kurve ist demnach überall gegen die Abscissenaxe konvex.

Krümmungsradius und Evolute der Ellipse.

245. Es sei

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf ihren Mittelpunkt und ihre Axen. Man erhält hieraus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y},\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}\,.$$

Werden diese Werte für in die Formel des Krümmungsradius eingesetzt, so erhält sie die Gestalt

$$\varrho = \frac{\left(1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2y^3}} = \frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}\,.$$

Um die Evolute der Ellipse zu erhalten, benutzen wir wiederum die beiden Gleichungen

$$1+\frac{dy^2}{dx^2}+(y-\eta)\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \tag{1}$$

$$x-\xi+(y-\eta)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2}$$

Werden für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ ihre Werte eingesetzt; so wird die Gleichung (1)

$$a^4y^3 + b^4x^2y - a^2b^4(y-\eta) = 0,$$

oder

$$y - \eta = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)\, y}{a^2 b^4} = \frac{a^4 y^2 + b^2 (a^2 b^2 - a^2 y^2)}{a^2 b^4}\, y$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)\, y^2 + b^4}{b^4}\, y,$$

und wenn man $a^2 - b^2 = c^2$ setzt,

$$y - \eta = \frac{(b^4 + c^2 y^2)\, y}{b^4} = y + \frac{c^2 y^3}{b^4},$$

oder schliesslich

$$\eta = -\frac{c^2 y^3}{b^4}. \tag{3}$$

Wird in der Gleichung (3) y mit x und b mit a vertauscht, wodurch c^2 in $-c^2$ übergeht, so erhält man

$$\xi = \frac{c^2 x^3}{a^4}. \tag{4}$$

Setzt man zur Abkürzung $\frac{c^2}{a} = A$ und $\frac{c^2}{b} = B$, so erhält man demnach

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ und } \frac{y}{b} = -\left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Werden diese Werte in die Gleichung der Ellipse eingesetzt, indem man letzterer die Form giebt

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

so wird die Gleichung der Evolute

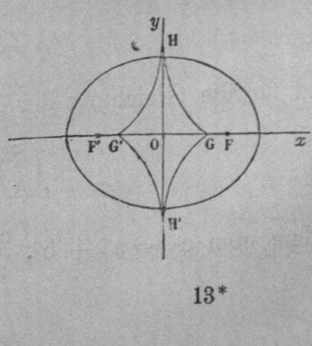
$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1. \tag{α}$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Kurve ist symmetrisch in Bezug auf die Axen der Ellipse, was übrigens vorauszusehen war. Für $\eta = 0$ ist

$$\xi = \pm A = \pm \frac{c^2}{a};$$

die Kurve trifft also die x-Axe in zwei zwischen den Brennpunkten gelegenen Punkten G und G'. Ebenso erhält man die Punkte H und H', worin die Evolute die y-Axe trifft.

Fig. 42.



Durch zweimalige Differentiation der Gleichung (α) erhält man

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{d\xi}{A}+\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{d\eta}{B}=0,$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{4}{3}}\frac{d\xi^2}{A^2}-\frac{1}{3}\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{4}{3}}\frac{d\eta^2}{B^2}+\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{d^2\eta}{B}=0,$$

und hieraus

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=\frac{\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{4}{3}}\frac{1}{A^2}+\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{4}{3}}\frac{1}{B^2}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2}{3\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{B}}.$$

Da der Zähler dieses Ausdruckes positiv ist, hat $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ dasselbe Vorzeichen wie dessen Nenner, und somit dasselbe Vorzeichen wie η. Die Kurve kehrt also beständig ihre Konvexität der x-Axe zu.

Es ist

$$\frac{d\eta}{d\xi}=-\frac{\left(\frac{\xi}{A}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{A}}{\left(\frac{\eta}{B}\right)^{-\frac{1}{3}}\frac{1}{B}}=-\left(\frac{A\eta}{B\xi}\right)^{+\frac{1}{3}}\frac{B}{A},$$

und dieser Ausdruck wird Null für $\eta=0$ und unendlich für $\xi=0$; die Axen berühren folglich die Kurve in den Punkten G, G′ und H, H′, die infolge deren symmetrischer Gestalt Rückkehrpunkte sein müssen.

Krümmungsradius und Evolute der Hyperbel.

246. Der Krümmungsradius und die Evolute der Hyperbel können aus den vorstehenden Formeln erhalten werden, wenn man darin $-b^2$ statt b^2 setzt. Man erhält so für den Krümmungsradius

$$\varrho=\frac{(b^4x^2+a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$

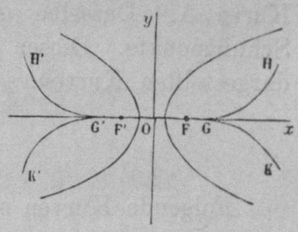
und für die Gleichung der Evolute

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

indem man $c^2=a^2+b^2$, $\frac{c^2}{a}=A$ und $\frac{c^2}{b}=B$ setzt.

Die Evolute der Hyperbel besteht aus zwei unendlichen Zweigen H G K und H'G'K', die in Bezug auf die beiden Axen symmetrisch sind; sie hat zwei Rückkehr punkte G und G', die auf der Hauptaxe vom Mittelpunkte aus jenseits der Brennpunkte liegen, und sie kehrt der Hauptaxe überall ihre konvexe Seite zu.

Fig. 43.



Einhüllende Kurve einer beweglichen Kurve.

247. Wenn sich eine Kurve auf einer Ebene bewegt, indem sie nach einem bestimmten Gesetze ihre Form ändert, so berührt sie im allgemeinen beständig eine feste Kurve, die man ihre einhüllende Kurve nennt. Man kann annehmen, die bewegliche Kurve ist durch die Gleichung

$$F(x, y, c) = 0 \tag{1}$$

dargestellt, worin c ein Parameter ist, den man sich stetig ändern lässt. Legt man dem Parameter nacheinander zwei Werte c und $c + \Delta c$ bei, so werden sich die Kurven, die durch die Gleichungen

$$F(x, y, c) = 0, \quad F(x, y, c + \Delta c) = 0$$

dargestellt sind, in einem Punkte (x, y) schneiden, für den

$$F(x, y, c + \Delta c) - F(x, y, c) = 0,$$

und folglich auch

$$\frac{F(x, y, c + \Delta c) - F(x, y, c)}{\Delta c} = 0. \tag{2}$$

Wird Δc unendlich klein, so werden die Koordinaten des Punktes (x, y), die beständig den Gleichungen (1) und (2) genügen, beim Übergange zur Grenze die Gleichungen

$$F(x, y, c) = 0, \quad \frac{dF}{dc} = 0 \tag{3}$$

erfüllen. Man erhält also den Grenzpunkt M, worin sich die Kurve (1) und die ihr unendlich nahe Kurve schneiden, durch Auflösung der Gleichungen (3). Eliminiert man dann c zwischen diesen Gleichungen, so erhält man den Ort der Punkte M, d. h. *den Ort der successiven Schnittpunkte* der durch die Gleichung (1) dargestellten Kurven.

Dieser Ort ist die gesuchte einhüllende Kurve. Denn eine durch die Gleichung (1) dargestellte Kurve A wird durch die ihr vorhergehende B und durch die ihr folgende C in zwei Punkten geschnitten, die schliesslich zusammenfallen. Die Gerade, die diese

beiden Punkte verbindet, wird also dann Tangente an der Kurve A. Dasselbe gilt offenbar für den Ort der successiven Schnittpunkte. Dieser berührt also alle durch die Gleichung (1) dargestellten Kurven.

Übungen.

Folgende Kurven sind zu bestimmen:

1. Die Evolute der Kurve

$$3\,a\,y^2 = 2\,x^3.$$

Auflösung.

$$81\,a\,y^2 = 16\,(2\,a \pm \sqrt{a^2 - 6\,a\,x})^2\,(\pm \sqrt{a^2 - 12\,a\,x} - a).$$

2. Die Evolute der Kurve

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Auflösung.

$$(x + y)^{\frac{2}{3}} + (x - y)^{\frac{2}{3}} = 2\,a^{\frac{2}{3}}.$$

3. Die einhüllende Kurve der koncentrischen Ellipsen, deren Axen dieselben Richtungen haben, und bei denen die Summe der Axen konstant ist.

Auflösung.

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}.$$

Denselben Ort findet man auch, wenn man die einhüllende Kurve einer Geraden von konstanter Länge bestimmt, die sich bewegt, indem sie sich auf zwei einen rechten Winkel bildende Gerade stützt.

Einundzwanzigste Lektion.

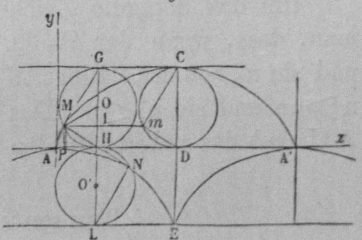
Spezielle Untersuchung der Cykloide.

Definition und Gleichung der Kurve. — Tangente und Normale. — Radius des Krümmungskreises. — Evolute. — Länge eines Cykloidenbogens. —

Definition und Gleichung der Cykloide.

248. Die Cykloide ist der Ort aller Lagen, die ein fester Peripheriepunkt M eines Kreises einnimmt, wenn letzterer auf einer unbegrenzten Geraden A x *rollt, ohne zu gleiten.*

Fig 44.



Wir wählen als Abscissenaxe die Gerade A x, als Ursprung der Koordinaten den Punkt A, worin sich der erzeugende Punkt M am Anfange der Bewegung befindet, und als Ordinatenaxe die Senkrechte A y.

Man erkennt a priori, dass die Ordinate ein Maximum im Punkte C wird, der der Abscisse $AD = \frac{1}{2}$ circ. OM entspricht; dass die Kurve die Abscissenaxe dann wiederum in einem Punkte A' trifft, dessen Abscisse gleich dem Umfange des erzeugenden Kreises ist, dass die beiden Kurvenbogen CA' und CA in Bezug auf CD symmetrisch liegen, und dass zur Rechten des Punktes A' wie zur Linken von A eine unbegrenzte Anzahl von Bogen existiert, die ACA' identisch gleich sind.

Wir wollen nun die Gleichung der Kurve bestimmen. Es seien $AP = x$, $MP = y$, die Koordinaten eines Punktes M der Kurve; ferner setzen wir $MO = a$, $MOH = u$, und ziehen MJ senkrecht auf GH.

Zufolge der Art der Erzeugung der Kurve ist der Kreisbogen MH gleich der Geraden AH; also ist

$$x = AH - PH = \text{arc}\, MH - MJ = a\,u - a \sin u = a\,(u - \sin u),$$

$$y = OH - JO = a - a \cos u = a\,(1 - \cos u).$$

Um die Gleichung der Cykloide zu erhalten, hat man also nur u zwischen den beiden Gleichungen

$$x = a(u - \sin u) \qquad (1)$$

$$y = a(1 - \cos u) \qquad (2)$$

zu eliminieren.

Die zweite giebt

$$\cos u = \frac{a-y}{a}, \text{ oder } u = \text{arc} \cos \frac{a-y}{a},$$

und folglich

$$\sin u = \pm \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a}.$$

Durch Einsetzung dieser Werte in die Gleichung (1) wird die Gleichung der Cykloide

$$x = a \, \text{arc} \cos \frac{a-y}{a} \mp \sqrt{2ay - y^2}. \qquad (3)$$

Um das doppelte Zeichen der Wurzel zu verstehen, beachte man, dass, wenn der Punkt M auf dem Bogen AC liegt, $u < \pi$ und $\sin u > 0$ ist. Liegt M dagegen auf dem Bogen CA′, so ist $u > \pi$ und $\sin u < 0$. Das obere Zeichen gilt also für den Bogen AC und das untere für den Bogen CA′.

Tangente und Normale.

249. Um $\frac{dy}{dx}$ zu erhalten, könnte man die Gleichung (3) differenzieren, einfacher ist es jedoch, die Gleichungen (1) und (2) zu differenzieren, worin x und y Funktionen der unabhängigen Veränderlichen u sind; man erhält

$$dx = a\,du\,(1 - \cos u) = y\,du$$

$$dy = a\,du \sin u = du \sqrt{2ay - y^2}.$$

Wird die untere Gleichung durch die obere dividiert, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y}.$$

Da die Subnormale des Punktes M den Ausdruck $y \frac{dy}{dx}$ hat, so ist sie gleich $\sqrt{2ay - y^2}$. Nun ist

$$\sqrt{2ay - y^2} = \sqrt{y(2a - y)} = \sqrt{JH \cdot JG} = MJ = PH.$$

Also ist MH die Normale im Punkte M, und die auf MH senkrechte Linie MG die Tangente in diesem Punkte.

Hieraus ergiebt sich ein sehr einfaches Mittel eine Tangente an einen Punkt M einer Cykloide zu ziehen. Angenommen, der Kreis CMD sei um das Maximum der Ordinate als Durchmesser beschrieben, so ziehen wir Mm parallel zu Ax: dann ist die durch M parallel zu Cm gezogene Gerade die gesuchte Tangente.

250. Die Länge der Normale im Punkte M hat den Ausdruck

$$\sqrt{y^2 + \frac{y^2\, dy^2}{dx^2}} = \sqrt{y^2 + 2ay - y^2} = \sqrt{2ay}.$$

Nun ist GH = 2a, HJ = y; die Normale ist also die mittlere Proportionale zwischen JH und GH; also ist die Linie MH die Normale.

Radius und Mittelpunkt des oskulierenden Kreises.

251. Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1},$$

und somit

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{2a}{y} - 1;$$

folglich ist

$$2\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a}{y^2}\,\frac{dy}{dx},$$

oder

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}.$$

Setzen wir diese Werte von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ in den bekannten Ausdruck des Krümmungsradius ein, so wird

$$\varrho^2 = \frac{\left(\frac{2a}{y}\right)^3}{\frac{a^2}{y^4}} = \frac{8a^3y}{a^2},$$

und folglich

$$\varrho = 2\sqrt{2ay}.$$

Nun ist aber

$$\sqrt{2ay} = \sqrt{GH \cdot HJ} = MH;$$

der Krümmungsradius ist also das Doppelte von MH und da MH die Normale im Punkte M ist, so erhält man den Krümmungsradius, indem man auf der Verlängerung von MH einen Punkt N so bestimmt, dass MN = 2MH ist.

Evolute der Cykloide.

252. Nach dem Vorstehenden ist die Evolute der Cykloide sehr einfach zu erhalten. Es sei HNL ein Kreis, der dem mit OM beschriebenen gleich ist, und der die x-Axe im Punkte H von unten berührt. Ziehen wir nun LE parallel zu Ax und verlängern den Durchmesser CD bis er diese Linie in E trifft, so ist, da arc MH = arc NH,

$$\text{arc}\, NH = AH,$$

und ferner

$$\text{arc}\, HNL = AD;$$

folglich ist

$$\text{arc}\, NL = AD - AH = DH = LE.$$

Die Evolute der Cykloide wird also durch die Bewegung eines Peripheriepunktes N eines Kreises erzeugt, der dem mit OM beschriebenen gleich ist, und der auf einer Geraden LE rollt, die in einem dem Durchmesser dieses Kreises gleichen Abstande unterhalb der x-Axe parallel zu ihr gezogen ist.

Diese Evolute ist somit eine der ursprünglichen gleiche Cykloide, was sich übrigens auch beweisen lässt, ohne dass die Länge des Krümmungsradius bekannt ist. Denn ebenso wie MG die Cykloide AMC im Punkte M berührt, ist NH oder MN die Tangente der Cykloide ANE im Punkte N. Die letztere ist also der Ort für die successiven Schnittpunkte der Normalen der Cykloide ACA′, und demnach deren Evolute.

253. Dasselbe Resultat kann auch durch Rechnung erhalten werden.

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y} - 1}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die Gleichungen

$$1 + \frac{d\,y^2}{d\,x^2} + (y - \eta)\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = 0,$$

$$x - \xi + (y - \eta)\frac{d\,y}{d\,x} = 0,$$

ergiebt sich aus der ersten:

$$\frac{2\,a}{y} - (y - \eta)\frac{a}{y^2} = 0, \text{ oder } 2\,a\,y - a\,(y - \eta) = 0,$$

und schliesslich

$$y = -\eta. \tag{1}$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man

$$x - \xi + (y - \eta)\sqrt{\frac{2\,a}{y} - 1} = 0,$$

und nach Einsetzen des Wertes von y

$$x = \xi + 2\,\eta\sqrt{-\frac{2\,a}{\eta} - 1},$$

oder schliesslich, wenn η unter das Wurzelzeichen gebracht und dessen Vorzeichen geändert wird, da η negativ ist,

$$x = \xi - 2\sqrt{-2\,a\,\eta - \eta^2}. \tag{2}$$

Werden die in (1) und (2) für y und x erhaltenen Werte in die Gleichung der Cykloide eingesetzt:

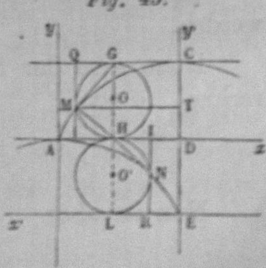
$$x = a \text{ arc cos } \frac{a - y}{a} - \sqrt{2\,a\,y - y^2}, \tag{3}$$

so wird die Gleichung der Evolute

$$\xi = a \text{ arc cos } \frac{a + \eta}{a} + \sqrt{-2\,a\,\eta - \eta^2}. \tag{4}$$

Wir wollen nun als Axen die Geraden E x′ und E y′ wählen, und mit x′, y′ die neuen Koordinaten irgend eines Punktes N der Evolute bezeichnen. Da

Fig. 45.



$$AD = \pi\,a,\ DE = 2\,a$$

ist, so wird dann

$$\xi = AD - DJ = \pi\,a - x',$$

$$\eta = NR - JR = y' - 2\,a.$$

Setzen wir diese Werte für ξ und η in die Gleichung (4) ein, so erhält die auf die neuen Axen bezogene Gleichung der Evolute die Gestalt

$$\pi a - x' = a \arc\cos \frac{y' - a}{a} + \sqrt{2ay' - y'^2},$$

oder

$$x' = a\left(\pi - \arc\cos \frac{y' - a}{a}\right) - \sqrt{2ay' - y'^2},$$

oder auch, da zwei Supplementwinkel entgegengesetzt gleiche Cosinus haben,

$$x' = a \arc\cos\left(\frac{a - y'}{a}\right) - \sqrt{2ay' - y'^2}.$$

Die Vergleichung dieser Gleichung mit der Gleichung (3) zeigt, dass die Evolute der Cykloide eine der gegebenen gleiche Cykloide ist, die so gegen die Axen E x', E y' liegt, wie jene gegen die ursprünglichen Axen.

Länge eines Cykloidenbogens.

254. Die Linie $MN = 2HN$ ist der dem Punkte M der Cykloide-Evolvente entsprechende Krümmungsradius, oder die in dem Punkte N an die Cykloide-Evolute gezogene Tangente, und der Krümmungsradius im Punkte A ist gleich Null; weil die Normale MH in ihm Null ist. Da nun ein Bogen der Evolute gleich der Differenz der äussersten Krümmungsradien (**240**) ist, wird also

$$\arc AN = MN = 2NH.$$

Gehen wir auf die ursprüngliche Cykloide zurück, so ist in ihr $\arc CM = 2MG$, und wenn derselbe Bogen als Funktion der Koordinaten seines Endpunktes dargestellt wird, ist

$$\arc CM = 2MG = 2\sqrt{2a \cdot MQ},$$

oder, da $MQ = 2a - y$,

$$\arc CM = 2\sqrt{4a^2 - 2ay}.$$

255. Diese Gleichung kann auch durch Rechnung erhalten werden.

Denn wird der Bogen $CM = s$ vom Scheitelpunkte C aus gerechnet, so ist

$$ds = \pm dy \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{\sqrt{2ay - y^2}},$$

und folglich

$$ds = \pm dy \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a-y}}.$$

Da arc CM mit zunehmenden y abnimmt, so ist das negative Vorzeichen zu wählen; somit wird

$$ds = -dy \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a-y}} = d\,(2\sqrt{2a}\,\sqrt{2a-y}),$$

und

$$s = 2\sqrt{2a}\,\sqrt{2a-y} + C,$$

oder

$$s = 2\sqrt{4a^2-2ay} + C.$$

Die Konstante C wird erhalten, wenn man $y = 2a$ setzt, woraus sich $s = 0$, und folglich auch $C = 0$ ergiebt. Man hat also wie oben

$$\text{arc}\, CM = 2\sqrt{4a^2-2ay}.$$

256. Ist $y = 0$, so wird

$$\text{arc}\, CA = 4a,$$

und demnach (Fig. 44)

$$\text{arc}\, ACA' = 8a.$$

Also *der ganze Cykloidenbogen ist gleich dem vierfachen Durchmesser des erzeugenden Kreises.*

Übungen.

1. Wenn eine ebene Kurve C ohne zu gleiten auf einer festen Kurve C′ rollt, so beschreibt jeder Punkt der ersteren eine Kurve, deren Normale in jedem Momente durch den Berührungspunkt der Kurven C und C′ geht.

2. Es ist die Kurve zu untersuchen, die durch einen Punkt erzeugt wird, der sich mit gleichmässiger Geschwindigkeit auf der Peripherie eines Kreises bewegt, während dessen Mittelpunkt sich ebenfalls mit gleichmässiger Geschwindigkeit in gerader Linie bewegt.

3. Der Ort der Punkte, aus denen man an eine Cykloide zwei Tangenten ziehen kann, die einen rechten Winkel bilden, ist eine verkürzte Cykloide. (Die Kurve der zweiten Aufgabe, wenn die Geschwindigkeit des Mittelpunktes geringer als die des erzeugenden Punktes ist.

Zweiundzwanzigste Lektion.

Krümmung ebener Kurven.

Ausdruck des Krümmungsradius, wenn die unabhängige Veränderliche beliebig gewählt wird. — Anwendung auf Polarkoordinaten. — Theorie der Krümmung ebener Kurven. — Identität des Krümmungskreises und des oskulierenden Kreises. — Anwendungen.

Ausdruck des Krümmungsradius, wenn die unabhängige Veränderliche beliebig gewählt wird.

257. Ist x die unabhängige Veränderliche, so hatten wir

$$\varrho = \frac{\left(1 + \frac{d\,y^2}{d\,x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2\,y}{d\,x^2}}.$$

Nun wollen wir x und y als Funktionen einer neuen Veränderlichen t auffassen und unter dieser Voraussetzung den Ausdruck für ϱ suchen. Wie früher (**92**) gezeigt wurde, bleibt dann $\frac{d\,y}{d\,x}$ unverändert, und für $\frac{d^2\,y}{d\,x^2}$ ist zu setzen $\frac{d\,x\,d^2\,y - d\,y\,d^2\,x}{d\,x^3}$.

Also wird

$$\varrho = \frac{\left(1 + \frac{d\,y^2}{d\,x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d\,x\,d^2\,y - d\,y\,d^2\,x}{d\,x^3}},$$

oder

$$\varrho = \frac{(d\,x^2 + d\,y^2)^{\frac{3}{2}}}{d\,x\,d^2\,y - d\,y\,d^2\,x}. \qquad (1)$$

Hierin sind die Differenziale von x und y nach der unabhängigen Veränderlichen t genommen.

Beispiel. — Die Cykloide wird durch die beiden Gleichungen

$$x = a\,(u - \sin u), \quad y = a\,(1 - \cos u)$$

dargestellt.

Hieraus ergiebt sich, wenn u als unabhängige Veränderliche gewählt wird

$$d\,x = a\,(1 - \cos u)\,d\,u, \quad d^2 x = a \sin u\,d\,u^2,$$

$$d\,y = a \sin u\,d\,u, \quad d^2 y = a \cos u\,d\,u^2,$$

und folglich

$$d\,x^2 + d\,y^2 = (1 - 2\cos u + \cos^2 u + \sin^2 u)\,a^2\,d\,u^2,$$

$$d\,x\,d^2 y - d\,y\,d^2 x = (\cos u - \cos^2 u - \sin^2 u)\,a^2\,d\,u^3,$$

oder

$$d\,x^2 + d\,y^2 = 2\,(1 - \cos u)\,a^2\,d\,u^2,$$

$$d\,x\,d^2 y - d\,y\,d^2 x = -(1 - \cos u)\,a^2\,d\,u^3.$$

Demnach ist

$$\varrho = 2^{\frac{3}{2}}\,\frac{(1 - \cos u)^{\frac{3}{2}}\,a^3\,d\,u^3}{(1 - \cos u)\,a^2\,d\,u^3} = 2\,a\,\sqrt{2}\,(1 - \cos u)^{\frac{1}{2}}.$$

Nun ist

$$1 - \cos u = \frac{y}{a};$$

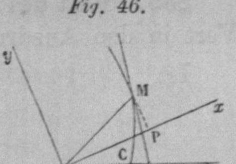
also wird

$$\varrho = 2\,a\,\sqrt{2}\,\sqrt{\frac{y}{a}} = 2\,\sqrt{2\,a\,y}.$$

Ausdruck des Krümmungsradius in Polarkoordinaten.

258. Mittels der Formel (1) erhält man den Krümmungsradius im Punkte M als Funktion der Polarkoordinaten des letzteren. Dazu legen wir durch den Pol zwei rechtwinklige Axen O x und O y. Es sei $x\,O\,A = \alpha$, $O\,P = x$, $M\,P = y$, $O\,M = r$, $M\,O\,A = \vartheta$, so wird

Fig. 46.



$$x = r\cos(\vartheta - \alpha), \quad y = r\sin(\vartheta - \alpha),$$

oder wenn zur Abkürzung $\vartheta - \alpha = \vartheta'$ gesetzt wird,

$$x = r\cos\vartheta', \quad y = r\sin\vartheta'.$$

Hieraus folgt, da $d\,\vartheta' = d\,\vartheta$,

$$d\,x = d\,r\cos\vartheta' - r\,d\,\vartheta\sin\vartheta'$$

$$d\,y = d\,r\sin\vartheta' + r\,d\,\vartheta\cos\vartheta',$$

$$d^2 x = d^2 r \cos\vartheta' - 2\, d r\, d\vartheta \sin\vartheta' - r\, d\vartheta^2 \cos\vartheta'.$$
$$d^2 y = d^2 r \sin\vartheta' + 2\, d r\, d\vartheta \cos\vartheta' - r\, d\vartheta^2 \sin\vartheta'.$$

Also ist

$$d x^2 + d y^2 = d r^2 \cos^2\vartheta' + r^2 \sin^2\vartheta'\, d\vartheta^2 + d r^2 \sin^2\vartheta' + r^2 \cos^2\vartheta'\, d\vartheta^2$$
$$= d r^2 (\sin^2\vartheta' + \cos^2\vartheta') + r^2 d\vartheta^2 (\sin^2\vartheta' + \cos^2\vartheta'),$$

oder

$$d x^2 + d y^2 = d r^2 + r^2 d\vartheta^2. \tag{2}$$

Ebenso ist

$$d x\, d^2 y - d y\, d^2 x$$
$$= (d r \cos\vartheta' - r\, d\vartheta \sin\vartheta')(d^2 r \sin\vartheta' + 2\, d r\, d\vartheta \cos\vartheta' - r\, d\vartheta^2 \sin\vartheta')$$
$$- (d r \sin\vartheta' + r\, d\vartheta \cos\vartheta')(d^2 r \cos\vartheta' - 2\, d r\, d\vartheta \sin\vartheta' - r\, d\vartheta^2 \cos\vartheta')$$
$$= d^2 r (d r \sin\vartheta' \cos\vartheta' - r\, d\vartheta \sin^2\vartheta' - d r \sin\vartheta' \cos\vartheta' - r\, d\vartheta \cos^2\vartheta')$$
$$+ 2\, d r^2 (d\vartheta \cos^2\vartheta' + d\vartheta \sin^2\vartheta') + r^2 (\sin^2\vartheta'\, d\vartheta^3 + \cos^2\vartheta'\, d\vartheta^3),$$

oder einfacher

$$d x\, d^2 y - d y\, d^2 x = 2\, d r^2 d\vartheta - r\, d\vartheta\, d^2 r + r^2 d\vartheta^3. \tag{3}$$

Werden die in den Gleichungen (2) und (3) erhaltenen Werte in die Gleichung (1) eingesetzt, so wird

$$\varrho = \frac{(d r^2 + r^2 d\vartheta^2)^{\frac{3}{2}}}{2\, d r^2 d\vartheta - r\, d^2 r\, d\vartheta + r^2 d\vartheta^3},$$

oder

$$\varrho = \frac{\left(r^2 + \frac{d r^2}{d\vartheta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\,\frac{d r^2}{d\vartheta^2} - r\,\frac{d^2 r}{d\vartheta^2}}. \tag{4}$$

Einfacher ist dieses Resultat zu erhalten, wenn man die Axe O x mit O M zusammenfallen lässt. Dann wird $\alpha = \vartheta$ und

$$d x = d r,\ d y = r\, d\vartheta,$$
$$d^2 x = d^2 r - r\, d\vartheta^2,\ d^2 y = 2\, d r\, d\vartheta.$$

259. Statt des Radius vector r wird bisweilen dessen reciproker Wert in den Ausdruck des Krümmungsradius eingeführt.

Ist

$$r = \frac{1}{u},$$

so wird

$$d r = -\frac{d u}{u^2},\ d^2 r = \frac{2\, d u^2 - u\, d^2 u}{u^3}$$

und folglich

$$\varrho = \frac{\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4}\frac{d u^2}{d \vartheta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{u^2} + \frac{2}{u^4}\frac{d u^2}{d \vartheta^2} + \frac{u\, d^2 u - 2\, d u^2}{u^4\, d \vartheta^2}} = \frac{\left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^4}\frac{d u^2}{d \vartheta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^3}\frac{d^2 u}{d \vartheta^2}},$$

oder schliesslich

$$\varrho = \frac{\left(u^2 + \frac{d u^2}{d \vartheta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{u^3\left(u + \frac{d^2 u}{d \vartheta^2}\right)} \tag{5}$$

260. Beispiele.

1. *Kurven zweiten Grades.* Die allgemeine Gleichung der Kurven zweiten Grades, bezogen auf einen Brennpunkt und die durch die Brennpunkte gehende Kegelschnittsaxe hat die Gestalt

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}, \text{ oder } u = \frac{1 + e \cos \vartheta}{p}.$$

Dann ist

$$d u = -\frac{e}{p} \sin \vartheta\, d \vartheta, \quad d^2 u = -\frac{e}{p} \cos \vartheta\, d \vartheta^2,$$

und die Gleichung (5) ergiebt

$$\varrho = \frac{\left[\frac{(1 + e \cos \vartheta)^2}{p^2} + \frac{e^3}{p^2} \sin^2 \vartheta\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{(1 + e \cos \vartheta)^3}{p^3}\left(\frac{1 + e \cos \vartheta}{p} - \frac{e}{p} \cos \vartheta\right)},$$

oder

$$\varrho = p\, \frac{(1 + 2\, e \cos \vartheta + e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e \cos \vartheta)^3}.$$

2. *Logarithmische Spirale:* $r = a e^{m \vartheta}$. Man erhält hieraus

$$\frac{d r}{d \vartheta} = m a e^{m \vartheta} = m r, \quad \frac{d^2 r}{d \vartheta^2} = \frac{m\, d r}{d \vartheta} = m^2 r.$$

Nach Einsetzung dieser Werte in die Gleichung (4) wird

$$\varrho = \frac{[r^2 (1 + m^2)]^{\frac{3}{2}}}{r^2 (1 + m^2)},$$

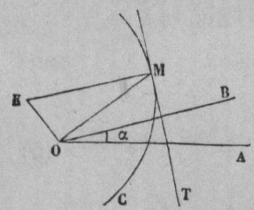
oder

$$\varrho = r \sqrt{1 + m^2}.$$

Es sei MK die Normale, OK die Subnormale des betrachteten Punktes. In dem rechtwinkligen Dreiecke KOM ist

$$MK = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{OK}^2} = \sqrt{r^2 + r^2 \operatorname{tang}^2 OMK}.$$

Fig. 47.



Nun ist

$$\operatorname{tang} OMK = \cot OMT = m,$$

und folglich

$$MK = r\sqrt{1 + m^2} = \varrho.$$

Der Endpunkt K der Subnormale ist also der Krümmungsmittelpunkt.

Um die Gleichung der Evolute zu bestimmen, wählen wir eine neue Polaraxe OB, die mit der früheren Axe einen Winkel α bildet. Ist dann K irgend ein Punkt der gesuchten Kurve, und setzt man $OK = r'$, $KOB = \vartheta'$, so wird

$$r' = mr = mae^{m\vartheta}.$$

Nun ist aber $\vartheta' + \alpha = \vartheta + \frac{\pi}{2}$; die Gleichung der Evolute wird also

$$r' = mae^{m\vartheta' + m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)},$$

oder

$$r' = ae^{m\vartheta'} . me^{m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Bestimmen wir die willkürliche Grösse α so, dass

$$me^{m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = 1$$

ist, woraus folgt

$$lm + m\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 0, \text{ oder } \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{lm}{m},$$

so wird die Gleichung der Kurve

$$r' = ae^{m\vartheta'}.$$

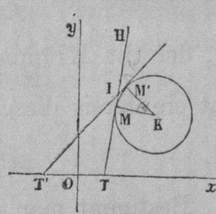
Also *die Evolute ist eine logarithmische Spirale, die der ursprünglichen gleich, aber anders gelegen ist.*

Die Krümmung ebener Kurven.

261. Die Krümmung eines Kreisumfanges ist in allen seinen Punkten gleich gross, und um so grösser, je kleiner der Radius R

oder je grösser dessen reciproker Wert $\frac{1}{R}$ ist. Naturgemäss wählt man also $\frac{1}{R}$ als Mass der Krümmung des Kreises.

Fig. 48.



Diese Definition wird deutlicher, wenn man einen Kreis betrachtet, der eine Gerade in einem Punkte berührt, in letzterem auf der Geraden eine Senkrechte errichtet, und auf dieser den Mittelpunkt des Kreises immer weiter von dem Berührungspunkte fortrückt. Jede der so entstehenden veränderlichen Kreislinien wird dann zwischen der festen Geraden und der ihr vorhergehenden liegen, und sich demnach um so mehr der Geraden nähern, je grösser ihr Radius ist.

Es seien MT und M'T' zwei an einen Kreis gezogene Tangenten, dessen Radius $MK = R$ ist, und es sei $HJM' = \omega$. Dann ist, da der Winkel MKM' gleich dem Winkel HJM',

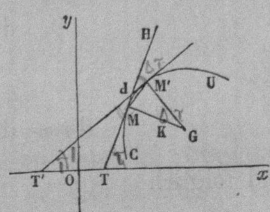
$$\text{arc } MM' = R\omega,$$

und folglich

$$\frac{1}{R} = \frac{\omega}{\text{arc } MM'}.$$

Die Krümmung eines Kreises ist also gleich dem Winkel, den zwei Tangenten miteinander bilden, dividiert durch den zwischen ihren Berührungspunkten liegenden Bogen.

Fig. 49.



262. Wir wollen nun eine beliebige Kurve CMM'U betrachten. C bezeichne einen festen Punkt auf ihr, und es sei $CM = s$, $MM' = \Delta s$; ferner seien die Winkel MTx und M'T'x, die die Tangenten MT und M'T' mit Ox bilden, bezw. gleich τ und τ', und $\Delta\tau$ die Differenz beider Winkel, d. i. der Winkel HJM'.

Wäre die Kurve eine Kreislinie, so würde $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ deren Krümmung im Punkte M sein und dieses Verhältnis wäre von Δs unabhängig. Ist die Kurve beliebig, so heisst der Quotient $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$, der sich mit Δs ändert, die *mittlere Krümmung* des Bogens MM' und *mittlerer Krümmungsradius* der Radius eines Kreises, bei dem zwei Tangenten, die an die Endpunkte eines mit Δs gleichen Bogens ge-

zogen werden, mit einander einen Winkel gleich $\Delta\tau$ bilden. Der Radius dieses Kreises ist gleich $\frac{\Delta s}{\Delta\tau}$.

Wir nehmen nun an, der Punkt M' nähere sich unbeschränkt dem Punkte M; $\frac{\Delta\tau}{\Delta s}$ nähert sich dann dem Differentialquotienten $\frac{d\tau}{ds}$, der die Krümmung der Kurve im Punkte M genannt werde. Hat ein Kreis dieselbe Krümmung und ist ϱ sein Radius, so ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{ds}, \quad \varrho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Bestimmt man auf dem inneren Teile der Normale eine Strecke $MK = \varrho$, so ist der um K mit dem Radius MK beschriebene Kreis der *Krümmungskreis* und dessen Mittelpunkt und Radius sind bezw. der zu dem Punkte M gehörende *Krümmungsmittelpunkt* und — *Radius.*

Den durch zwei Tangenten gebildeten Winkel, die an die Endpunkte eines unendlich kleinen Bogens gezogen sind, nennt man *Kontingenzwinkel.*

Also *die Krümmung einer Kurve in einem Punkte ist gleich dem Kontingenzwinkel, dividiert durch das Differential des Bogens.*

Identität des Krümmungskreises und des oskulierenden Kreises.

263. Der Krümmungskreis fällt mit dem durch die Theorie der Berührungen bestimmten oskulierenden Kreise zusammen. Denn es ist

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

$$d\tau = d\left(\text{arc tang}\,\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d\,\frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

und folglich

$$\frac{ds}{d\tau} = \varrho = \frac{\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx}}$$

oder

$$\varrho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

also *der Krümmungsradius ϱ ist gleich dem Radius des oskulierenden Kreises, und somit fällt der Krümmungskreis mit dem oskulierenden Kreise zusammen.*

264. Dieser Satz lässt sich auch geometrisch beweisen. Es seien MK und M'G (Fig. 49, S. 211), die in den Punkten M und M' an die gegebene Kurve gezogenen Normalen, G ihr Schnittpunkt, und MK der Krümmungsradius in dem Punkte M.

Verbinden wir M mit M', so ist

$$\mathrm{MG} : \mathrm{MM'} = \sin \mathrm{MM'G} : \sin \mathrm{G},$$

und folglich

$$\mathrm{MG} = \frac{\mathrm{MM'} \sin \mathrm{MM'G}}{\sin \mathrm{G}},$$

oder

$$\mathrm{MG} = \frac{\mathrm{MM'}}{\operatorname{arc} \mathrm{MM'}} \cdot \frac{\mathrm{G}}{\sin \mathrm{G}} \cdot \frac{\operatorname{arc} \mathrm{MM'}}{\mathrm{G}} \cdot \sin \mathrm{MM'G}.$$

Fallen, beim Übergang zur Grenze, die Punkte M und M' zusammen, so wird die Gerade MM' zur Tangente; folglich wird der Winkel MM'G; dann ein Rechter und sein Sinus gleich der Einheit. Ferner ist

$$\lim \frac{\mathrm{MM'}}{\operatorname{arc} \mathrm{MM'}} = 1, \ \lim \frac{\mathrm{G}}{\sin \mathrm{G}} = 1,$$

$$\lim \frac{\operatorname{arc} \mathrm{MM'}}{\mathrm{G}} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta \tau} = \frac{ds}{d\tau}:$$

also ist

$$\lim \mathrm{MG} = \frac{ds}{d\tau} = \mathrm{MK}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt K liegt also in dem Schnittpunkte zweier einander unendlich nahen Normalen; er fällt demnach mit dem Mittelpunkte des oskulierenden Kreises zusammen, und der Krümmungsradius (262) ist folglich auch der Radius des oskulierenden Kreises.

265. Wir haben die Identität des Krümmungsradius und des Radius des oskulierenden Kreises dadurch bewiesen, dass wir den Wert des letzteren aus dem des Krümmungsradius ableiteten; zu demselben Resultate können wir aber auch gelangen, indem wir umgekehrt den Wert des Krümmungsradius aus dem Werte des Radius des oskulierenden Kreises ableiten.

Denn der Radius des im Punkte M oskulierenden Kreises ist

$$\varrho = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} : \frac{d\,\frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Nun ist

$$dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = ds,$$

$$\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = d\left(\operatorname{arc\,tang} \frac{dy}{dx}\right) = d\tau,$$

und folglich

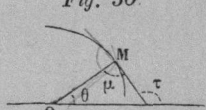
$$\varrho = \frac{ds}{d\tau}\,.$$

Ausdruck des Krümmungsradius in Polarkoordinaten.

266. Um den Ausdruck des Krümmungsradius in Polarkoordinaten zu erhalten, gehen wir von der Formel $\frac{ds}{d\tau} = \varrho$ aus.

Ist μ der Winkel, den die Tangente im Punkte M mit dem Radius vector bildet, so hat man

Fig. 50.



$$\operatorname{tang} \mu = \frac{r\,d\vartheta}{dr};$$

es ist aber

$$\mu = \tau - \vartheta,$$

und somit

$$\cot\,(\tau - \vartheta) = \frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\vartheta}. \tag{1}$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{d\vartheta - d\tau}{\sin^2(\tau - \vartheta)} = d\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\vartheta}\right),\ \frac{d\tau}{d\vartheta} = 1 - \sin^2(\tau - \vartheta)\,\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\vartheta}\right),$$

und da nach der Gleichung (1)

$$\sin^2(\tau - \vartheta) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{r}\,\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2},$$

so folgt

$$\frac{d\tau}{d\vartheta} = \frac{1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 - \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\vartheta}\right)}{1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}. \tag{2}$$

Ferner ist

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2} = r\sqrt{\frac{dr^2}{r^2} + d\vartheta^2},$$

oder

$$\frac{ds}{d\vartheta} = r\left[1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Wenn wir die Gleichung (3) durch die Gleichung (2) dividieren, erhalten wir somit

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\vartheta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\frac{dr^2}{d\vartheta^2} - r\frac{d^2r}{d\vartheta^2}},$$

ein Ausdruck, der schon oben (**258**) gefunden wurde.

267. Dieses Ergebnis wenden wir auf die logarithmische Spirale

$$r = ae^{m\vartheta}$$

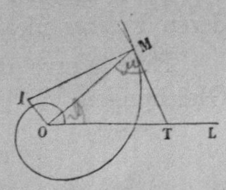
an. Es seien $MO = r$ und $MOL = \vartheta$ die Polarkoordinaten des Punktes M, dann ist

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2} = d\vartheta\sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\vartheta^2}},$$

oder, da $\frac{dr}{d\vartheta} = mr$ ist,

$$ds = r\,d\vartheta\sqrt{1 + m^2}.$$

Fig. 51.



Setzt man nun den Winkel $OMT = \mu$, so wird

$$\tau = \vartheta + \mu;$$

in der logarithmischen Spirale ist aber μ konstant, da $\tang \mu = \frac{1}{m}$, und somit $d\tau = d\vartheta$: also ist, wie schon oben gefunden wurde (**260**, 2),

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau} = r\sqrt{1 + m^2}.$$

Übungen.

Die Krümmungsradien folgender Kurven sind zu bestimmen:

1. $3ay^2 = 2x^3, \qquad \varrho^2 = \frac{(2a + 3x)^3}{3a^2}\,x.$

2. $y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right), \qquad \varrho = \frac{y^2}{c}.$

3. $r = a\,(2\cos\vartheta \pm 1), \qquad \varrho = a\,\frac{(5 \pm 4\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{3\,(3 \pm 2\cos\vartheta)}.$

4. $r^2 = a^2\cos 2\vartheta, \qquad \varrho = \frac{a^2}{3r}.$

Dreiundzwanzigste Lektion.

Die Kurven doppelter Krümmung.

Gleichung der Tangente. — Winkel zwischen der Tangente und den Koordinatenaxen. — Normalebene. — Differential eines Kurvenbogens. — Grenze des Verhältnisses zwischen Bogen und Sehne.

Gleichung der Tangente.

268. *Kurven doppelter Krümmung* heissen diejenigen Kurven, deren Punkte nicht alle in ein und derselben Ebene liegen.

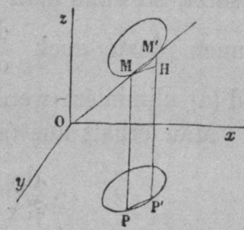
Eine Kurve doppelter Krümmung ist bekanntlich durch zwei Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$
$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

darzustellen, die zu zwei Flächen gehören, deren Schnittlinie die Kurve ist.

Als Hilfsflächen wählt man gewöhnlich Cylinderflächen, die den Axen parallel sind; dann enthält jede der beiden die Kurve bestimmenden Gleichungen nur zwei Veränderliche.

Fig. 52.



269. Um die Gleichung der an die Kurve in einem Punkte M gelegten Tangente zu erhalten, bestimmen wir zuerst die Gleichungen einer Sekante MM'. Es seien x, y, z die Koordinaten des Punktes M und $x + \varDelta x$, $y + \varDelta y$, $z + \varDelta z$ die des Punktes M'; die Gleichung der Sekante sind dann

$$Y - y = \frac{\varDelta y}{\varDelta x}(X - x),\ Z - z = \frac{\varDelta z}{\varDelta x}(X - x),$$

worin X, Y, Z, die laufenden Koordinaten bezeichnen.

Nähert sich nun der Punkt M' unbeschränkt dem Punkte M; so wird an der Grenze die Sekante MM' zur Tangente der Kurve im Punkte M, die Quotienten $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}, \frac{\varDelta z}{\varDelta x}$ gehen in $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ über, und man erhält die Gleichungen der Tangente

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),\ Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x), \tag{a}$$

worin $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ die Ableitungen von y und z nach x sind. Werden die linken und die rechten Seiten dieser Gleichungen durcheinander dividiert, so erhält man als Gleichung der Projektion der Tangente auf die yz-Ebene

$$Y - y = \frac{dy}{dz}(Z - z).$$

Wie die Form dieser Gleichungen zeigt, ist die Projektion der Tangente auf jede der Koordinatenebenen Tangente der Projektion der Kurve auf dieselbe Ebene. Dieses folgt übrigens auch daraus, dass die Punkte M und M' sowie die Punkte P und P' gleichzeitig zusammenfallen.

270. Die Differentiation der Gleichungen (1) und (2) ergiebt

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{df}{dz}\frac{dz}{dx} = 0, \\ \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dx} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{α}$$

Wenn man aus diesen Gleichungen die Werte der Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ bestimmt, und sie in die Gleichungen (a)

einsetzt, so kann man die Gleichungen der Tangente erhalten; doch können dazu auch $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ zwischen den vier Gleichungen (α) und (a) eliminiert werden.

Man erhält aus (a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y-y}{X-x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{Z-z}{X-x},$$

und durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Gleichungen (α)

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dx}(X-x) + \frac{df}{dy}(Y-y) + \frac{df}{dz}(Z-z) = 0, \\ \frac{d\varphi}{dx}(X-x) + \frac{d\varphi}{dy}(Y-y) + \frac{d\varphi}{dz}(Z-z) = 0. \end{aligned}\right\} \text{(b)}$$

Die Gleichungen der Tangente ergeben sich also, wenn in den Differentialgleichungen

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = 0$$

die Differentiale dx, dy, dz durch die Differenzen $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ ersetzt werden.

Winkel zwischen der Tangente und den Axen.

271. Wir setzen nun rechtwinklige Koordinaten voraus und bezeichnen mit α, β, γ die drei Winkel, die die Tangente mit den Koordinatenaxen Ox, Oy, Oz bildet.

In dem Trapez MPP'M', das die parallelen Seiten $MP = z$, $M'P' = z + \Delta z$ hat, ziehen wir MH parallel PP', und es bezeichne γ' den Winkel MM'H, d. h. den Winkel, den die Sekante mit der Axe Oz bildet.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke MM'H ergiebt sich

$$\cos\gamma' = \frac{\Delta z}{MM'} = \frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}},$$

oder, wenn t die unabhängige Veränderliche ist,

$$\cos\gamma' = \frac{\frac{\Delta z}{\Delta t}}{\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}}.$$

Fällt nun der Punkt M' mit M zusammen, so wird die Sekante zur Tangente, $\gamma' = \gamma$, und man erhält

$$\cos\gamma = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}}},$$

oder auch

$$\cos\gamma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}.$$

Wenn $dz > 0$ ist, d. h. wenn z zugleich mit t wächst, ist $\cos\gamma > 0$ und $\gamma < \frac{\pi}{2}$. Ist dagegen $dz < 0$, so wird $\cos\gamma < 0$, und $\gamma > \frac{\pi}{2}$.

Ebenso findet man $\cos\alpha$ und $\cos\beta$; die gesuchten drei Winkel sind also durch die Formeln gegeben

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}. \end{aligned}\right\} \text{(c)}$$

Wird der unendlich kleine Bogen MM' mit ds bezeichnet, so ist, wie wir alsbald sehen werden (**275**),

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

und die vorstehenden Formeln erhalten die Form

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds},\ \cos\beta = \frac{dy}{ds},\ \cos\gamma = \frac{dz}{ds}. \qquad \text{(d)}$$

Normalebene.

272. *Normalebene* der Kurve CM ist die Ebene, die auf der durch den Punkt M gelegten Tangente MT senkrecht steht. Bezeichnen

X, Y, Z die laufenden Koordinaten, so hat die Gleichung dieser Ebene die Form

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

Die Gleichungen der Tangente sind nun

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x),\quad Z-z=\frac{dz}{dx}(X-x);$$

damit die Ebene auf letzterer senkrecht steht, sind somit die Bedingungen zu erfüllen

$$\frac{B}{A}=\frac{dy}{dx},\quad \frac{C}{A}=\frac{dz}{dx};$$

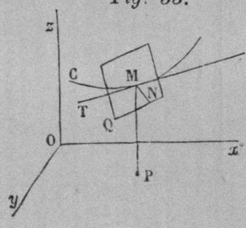
man erhält also als Gleichung der Normalebene

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0. \qquad \text{(e)}$$

273. Die Gleichung kann auch in folgender Weise erhalten werden.

Ist N irgend ein Punkt der Normalebene, der die Koordinaten X, Y, Z habe, und sind α', β', γ' die Winkel, die MN mit den Axen Ox, Oy, Oz bildet, so hat man

Fig. 53.



$$\cos\alpha'=\frac{X-x}{MN},$$

$$\cos\beta'=\frac{Y-y}{MN},$$

$$\cos\gamma'=\frac{Z-z}{MN}.$$

Bezeichnen ferner α, β, γ die Winkel, die die Tangente MT mit den Axen bildet (Formeln d), so ist

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \cos\beta=\frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}.$$

Nun ist

$$\cos TMN=\cos\alpha\cdot\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma',$$

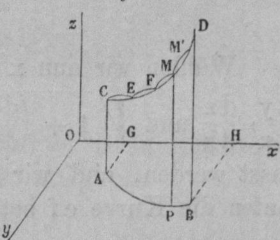
und andererseits ist $\cos TMN=0$, da der Winkel TMN ein Rechter ist; also wird die Gleichung der Normalebene

$$\frac{X-x}{MN}\frac{dx}{ds}+\frac{Y-y}{MN}\frac{dy}{ds}+\frac{Z-z}{MN}\frac{dz}{ds}=0,$$

eine Formel, die mit der unter (e) gegebenen übereinstimmt.

Differential des Bogens einer Kurve doppelter Krümmung.

Fig. 54.



274. Wir wählen auf dem Kurvenbogen C M D willkürlich und in beliebiger Anzahl die Punkte E, F, . . M, M', und betrachten das in ihn eingeschriebene körperliche Vieleck C E F . . . M M' . . . D. Wenn die Eckpunkte dieses Polygons einander unbeschränkt nahe kommen, während zugleich deren Zahl in die Unendlichkeit wächst, so nähert sich, wie nun bewiesen werden soll, dessen Umfang einer bestimmten Grenze, die wir als die Länge des Bogens C D betrachten.

Sind x, y, z die Koordinaten irgend eines Eckpunktes, z. B. von M, und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ diejenigen des auf ihn folgenden Punktes M', so ist

$$MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}.$$

Bezeichnet also P den Umfang des Vielecks, so hat man

$$P = \sum \left[\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}\right].$$

Nimmt Δx bis zur Null ab, so gehen

$\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta z}{\Delta x}$ in $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ über, und man kann demnach setzen

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} + \alpha,$$

wenn α eine Funktion bezeichnet, die gleichzeitig mit Δx verschwindet. Demnach ist

$$P = \sum \left[\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right] + \sum (\alpha \, \Delta x).$$

Nach einem früher (**16**) bewiesenen Satze ist aber

$$\lim \sum (\alpha \, \Delta x) = 0;$$

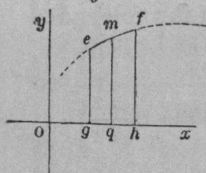
folglich wird

$$\lim P = \lim \sum \left[\varDelta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right].$$

Wählen wir nun x als unabhängige Veränderliche, so können $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ und $\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$ als Funktionen von x aufgefasst werden, und wir wollen in Bezug auf rechtwinklige Koordinaten die Kurve e f betrachten, die die Gleichung hat

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Fig. 55.



Setzt man O g = a, O h = b, so erhält man, wenn x von a bis b wächst,

$$\sum \left[\varDelta x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\right] = \sum (Y \varDelta x).$$

Nun hat $\sum (Y \varDelta x)$ die Fläche e f g h zur Grenze: die Grenze von P und die Fläche e f g h sind also durch dieselbe Zahl auszudrücken, und diese stellt die Länge des Bogens C D dar.

275. Wir setzen nun arc C M = s. Ist ferner O q = x, so wird numerisch

$$\text{arc } CM = \text{Fl. } emqg,$$

und folglich

$$ds = d\,(\text{Fl. } emqg) = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

oder

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Grenze des Verhältnisses zwischen Bogen und Sehne.

276. Aus dem Vorstehenden folgt, entsprechend dem früher für die ebenen Kurven Bewiesenen, leicht, dass *das Verhältnis des Bogens zu seiner Sehne die Einheit zur Grenze hat.*

Denn ist arc M M′ = $\varDelta s$, so wird

$$\frac{\text{arc } MM'}{MM'} = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}$$

$$= \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}}.$$

Aber Zähler und Nenner des auf der rechten Seite stehenden Quotienten haben als gemeinsame Grenze den Ausdruck

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}:$$

folglich ist

$$\lim \frac{\text{arc } MM'}{MM'} = 1.$$

Vierundzwanzigste Lektion.

Krumme Flächen und Linien doppelter Krümmung.

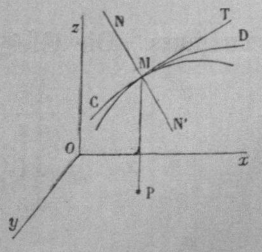
Gleichung der Tangentenebene. — Gleichungen der Normale. — Grad der Gleichung der Tangentenebene. — Aufgaben über Tangentenebenen. — Oskulierende Ebene. — Winkel zwischen der oskulierenden Ebene und den Koordinatenebenen. — Hauptnormale.

Gleichung der Tangentenebene.

277. Ist M (x, y, z) ein beliebiger Punkt einer durch die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

Fig. 56.



dargestellten Fläche, so kann man sich durch ihn eine unendliche Zahl von Kurven auf der Fläche gezogen denken. Alle im Punkte M an diese Kurven gelegten Tangenten liegen in ein und derselben Ebene, die wir die Tangentenebene der Fläche im Punkte M nennen werden.

Denn ist

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{2}$$

die Gleichung einer zweiten durch den Punkt M gehenden Fläche, so ist die Schnittlinie der Flächen (1) und (2) eine Kurve CMD, deren durch den Punkt M gelegte Tangente, wie in der vorigen Lektion gezeigt wurde, durch das folgende Gleichungssystem gegeben ist:

$$\frac{df}{dx}(X - x) + \frac{df}{dy}(Y - y) + \frac{df}{dz}(Z - z) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(X - x) + \frac{d\varphi}{dy}(Y - y) + \frac{d\varphi}{dz}(Z - z) = 0. \tag{4}$$

Nun stellt die Gleichung (3) für sich allein eine Ebene dar, die durch jede beliebige Tangente MT geht; da die Gleichung dieser Ebene von der Funktion φ ganz unabhängig ist: alle an die Fläche (1) im Punkte M gelegten Tangenten liegen also in der Ebene (3), die die Tangentenebene der Fläche im Punkte M ist.

Gleichungen der Normalen.

278. Die Normale der Fläche im Punkte M ist die in diesem Punkte auf der Tangentenebene errichtete Senkrechte. Da sie durch den Punkt M (x, y, z) geht, hat sie zwei Gleichungen von der Form

$$X - x = a(Z - z),$$
$$Y - y = b(Z - z).$$

Um a und b zu bestimmen, beachte man, dass die Linie senkrecht zu der Tangentenebene ist, die die Gleichung hat

$$\frac{df}{dx}(X - x) + \frac{df}{dy}(Y - y) + \frac{df}{dz}(Z - z) = 0, \tag{a}$$

und dass somit

$$a = \frac{df}{dx} : \frac{df}{dz}, \quad b = \frac{df}{dy} : \frac{df}{dz}$$

sein muss. Die Gleichungen der Normale sind folglich

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dz}(X - x) &= \frac{df}{dx}(Z - z), \\ \frac{df}{dz}(Y - y) &= \frac{df}{dy}(Z - z), \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

oder

$$\frac{X-x}{\frac{df}{dx}} = \frac{Y-y}{\frac{df}{dy}} = \frac{Z-z}{\frac{df}{dz}}. \qquad \text{(c)}$$

279. Die Gleichungen der Tangentenebene und der Normale können auch auf eine andere Form gebracht werden. Wir betrachten dazu z als Funktion von x und y und nennen p und q die partiellen Ableitungen von z nach x und y; so dass

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q$$

wird. Durch successive Differentiation der Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

nach x und y erhält man alsdann

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dz}dz = 0, \quad \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz = 0;$$

und somit

$$p = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dz}, \quad q = -\frac{df}{dy} : \frac{df}{dz}.$$

Hiernach kann die Gleichung der Tangentenebene (a) die Gestalt annehmen

$$p(X-x) + q(Y-y) - (Z-z) = 0,$$

oder auch

$$Z - z = p(X-x) + q(Y-y), \qquad \text{(d)}$$

und die Gleichungen (b) der Normale werden durch dieselbe Substitution

$$\begin{aligned} X - x + p(Z-z) &= 0, \\ Y - y + q(Z-z) &= 0. \end{aligned} \qquad \text{(e)}$$

280. Sind α, β, γ die Winkel, die die Normale mit den Axen bildet, so ist

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \cos\beta = -\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Grad der Gleichung der Tangentenebene, in Beziehung auf die Koordinaten des Berührungspunktes.

281. Die Gleichung der Tangentenebene kann auf die Form gebracht werden

$$\frac{df}{dx}X+\frac{df}{dy}Y+\frac{df}{dz}Z=x\frac{df}{dx}+y\frac{df}{dy}+z\frac{df}{dz}.$$

Ist die Gleichung der Fläche algebraisch und vom Grade m, so sind die Ableitungen $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$ algebraische Funktionen vom Grade m — 1. Die linke Seite der vorstehenden Gleichung ist also eine Funktion der Koordinaten des Berührungspunktes vom Grade m — 1. Die rechte Seite scheint zunächst in Bezug auf die genannten Koordinaten vom Grade m zu sein; sie kann jedoch auf den (m — 1)^ten^ Grad gebracht werden, wenn man die Gleichung der Fläche berücksichtigt.

Denn es sei

$$f(x, y, z) = u + u_1 + u_2 + \ldots,$$

worin u die Summe der Glieder vom Grade m, u_1 die Glieder vom Grade m — 1, u_2 die vom Grade m — 2 bezeichnet u. s. f.; so dass

$$\frac{df}{dx}=\frac{du}{dx}+\frac{du_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}+\ldots$$

$$\frac{df}{dy}=\frac{du}{dy}+\frac{du_1}{dy}+\frac{du_2}{dy}+\ldots$$

$$\frac{df}{dz}=\frac{du}{dz}+\frac{du_1}{dz}+\frac{du_2}{dz}+\ldots$$

Werden diese Gleichungen bezw. mit x, y, z multipliziert und die Produkte addiert, so erhält man

$$x\frac{df}{dx}+y\frac{df}{dy}+z\frac{df}{dz}=\left(x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}+z\frac{du}{dz}\right)$$
$$+\left(x\frac{du_1}{dx}+y\frac{du_1}{dy}+z\frac{du_1}{dz}\right)$$
$$+\left(x\frac{du_2}{dx}+y\frac{du_2}{dy}+z\frac{du_2}{dz}\right)+\ldots$$

oder, nach einem Satze über die homogenen Funktionen (**178.**),

$$x\frac{df}{dx}+y\frac{df}{dy}+z\frac{df}{dz}=m\,u+(m-1)\,u_1+(m-2)\,u_2+\ldots$$
$$=m\,(u+u_1+u_2+\ldots)-u_1-2\,u_2-3\,u_3-\ldots$$

Da aber der Punkt (x, y, z) auf der Fläche liegt, ist

$$u+u_1+u_2+\ldots=0;$$

die vorstehende Gleichung wird folglich

$$x\frac{df}{dx}+y\frac{df}{dy}+z\frac{df}{dz}=-u_1-2\,u_2-3\,u_3-\ldots$$

Die Gleichung der Tangentenebene reduziert sich demnach auf

$$\frac{df}{dx}X+\frac{df}{dy}Y+\frac{df}{dz}Z+u_1+2\,u_2+3\,u_3+\ldots=0,$$

und ist somit in Bezug auf die Koordinaten des Berührungspunktes vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade.

Aufgaben über die Tangentenebene.

282. *Durch einen Punkt (a, b, c) an eine Fläche eine Tangentenebene zu legen.*

Um die Koordinaten x, y, z des Berührungspunktes zu bestimmen, hat man die beiden Gleichungen

$$f(x, y, z)=0 \tag{1}$$

$$a\frac{df}{dx}+b\frac{df}{dy}+c\frac{df}{dz}+u_1+2\,u_2+\ldots=0. \tag{2}$$

Da drei Unbekannte vorhanden sind, ist die Aufgabe unbestimmt, was vorauszusehen war. Die Gleichungen (1) und (2) zusammen stellen den geometrischen Ort der Berührungspunkte dar. Die Geraden, die den Punkt (a, b, c) mit den verschiedenen Berührungspunkten verbinden, bilden einen um die Fläche beschriebenen Kegel, dessen Gleichung durch Elimination von x, y, z zwischen den Gleichungen (1) (2) und den Gleichungen

$$\frac{X-a}{x-a}=\frac{Y-b}{y-b}=\frac{Z-c}{z-c} \tag{3}$$

erhalten wird, die irgend eine der Erzeugenden bestimmen.

Ist die gegebene Fläche vom zweiten Grade, so wird die Berührungskurve eben sein, denn die Gleichung (2), der durch die Koordinaten des Berührungspunktes genügt wird, ist dann vom ersten Grade und stellt eine Ebene dar.

283. Eine Tangentenebene an eine Fläche einer gegebenen Geraden parallel zu legen.

Es seien

$$X = a Z, \; Y = b Z$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, so muss eine parallel zur Tangentenebene durch den Koordinatenanfang gelegte Ebene, deren Gleichung

$$\frac{df}{dx} X + \frac{df}{dy} Y + \frac{df}{dz} Z = 0$$

ist, die gegebene Gerade enthalten, woraus die Gleichung folgt

$$\frac{df}{dx} a + \frac{df}{dy} b + \frac{df}{dz} = 0. \tag{4}$$

Diese Gleichung stellt eine Fläche dar, die durch alle Berührungspunkte geht, und in Verbindung mit der Gleichung (1) bestimmt sie die Berührungskurve des umgeschriebenen Cylinders, dessen Erzeugende parallel der gegebenen Geraden sind.

Ist die Gleichung (1) algebraisch und vom m^{ten} Grade, so wird die Gleichung (4) vom $(m - 1)^{ten}$ Grade. Die Berührungskurve eines um eine Fläche zweiten Grades beschriebenen Cylinders ist also eben.

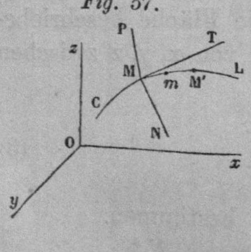
Die Gleichung des umgeschriebenen Cylinders erhält man durch Elimination von x, y, z zwischen den Gleichungen (1), (4) und den folgenden

$$X - x = a (Z - z), \; Y - y = b (Z - z),$$

die eine Gerade darstellen, die mit der gegebenen parallel ist und durch einen Punkt der Berührungskurve geht.

Oskulierende Ebene.

Fig. 57.



284. Wir betrachten eine beliebige Raumkurve C M L und nehmen auf ihr zwei Punkte M und M' in genügend kleinem Abstande von einander an. Die im Punkte M an die Kurve gelegte Tangente M T und der Punkt M' bestimmen dann eine Ebene, und man nennt *oskulierende Ebene* die Grenze,

zu der die Ebene M T M' übergeht, wenn die beiden Punkte M und M' zusammenfallen.

Man kann auch sagen, die im Punkte M oskulierende Ebene ist die Ebene, die durch den Punkt M und die beiden in seiner Nähe auf der Kurve liegenden Punkte m und M' geht, wenn letztere mit M zusammenfallen. Diese Definition stimmt mit der ersten überein; da die Linie M m in die Tangente übergeht, wenn die drei Punkte zusammenfallen.

285. Da die im Punkte M (x, y, z) oskulierende Ebene durch denselben gehen muss, so hat ihre Gleichung die Form

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0. \tag{1}$$

Ferner sind die Gleichungen der Tangente

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x),\ Z - z = \frac{dz}{dx}(X - x), \tag{2}$$

und da sie vollständig in der oskulierenden Ebene liegen muss, so ist für beliebige X oder (X — x)

$$A(X - x) + B\frac{dy}{dx}(X - x) + C\frac{dz}{dx}(X - x) = 0,$$

oder auch

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0. \tag{3}$$

Sind nun $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ die Koordinaten des Punktes M', und werden sie an die Stelle von X, Y, Z in die Gleichung (1) eingesetzt, so ergiebt sich

$$A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta z = 0. \tag{4}$$

Man kann aber x, y, z als Funktionen einer unabhängigen Veränderlichen t betrachten, und wenn α, β, γ Grössen bezeichnen, die mit Δt verschwinden, ist

$$\Delta x = \Delta t\frac{dx}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha\right),$$

$$\Delta y = \Delta t\frac{dy}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} + \beta\right).$$

$$\Delta z = \Delta t\frac{dz}{dt} + \frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2 z}{dt^2} + \gamma\right).$$

Die Gleichung (4) erhält demnach die Gestalt

$$\begin{aligned} A\left[\Delta t\frac{dx}{dt}+\frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha\right)\right] \\ +B\left[\Delta t\frac{dy}{dt}+\frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\beta\right)\right] \\ +C\left[\Delta t\frac{dz}{dt}+\frac{\Delta t^2}{1.2}\left(\frac{d^2z}{dt^2}+\gamma\right)\right]=0,\end{aligned}$$

oder, bei Berücksichtigung der Gleichung (3) und nach Division durch $\frac{1}{2}\,\Delta t^2$,

$$A\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha\right)+B\left(\frac{d^2y}{dt^2}+\beta\right)+C\left(\frac{d^2z}{dt^2}+\gamma\right)=0.$$

An der Grenze verschwinden α, β, γ, und man erhält dann nach Multiplikation mit dt^2

$$A\,d^2x+B\,d^2y+C\,d^2z=0, \tag{5}$$

wodurch in Verbindung mit der Gleichung (3) die Verhältnisse $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ bestimmt werden können. Durch Elimination von B zwischen den Gleichungen (3) und (5) wird

$$A\,(dx\,d^2y-dy\,d^2x)+C\,(dz\,d^2y-dy\,d^2z)=0,$$

woraus folgt

$$\frac{A}{C}=\frac{dy\,d^2z-dz\,d^2y}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}.$$

Analog erhält man

$$\frac{B}{C}=\frac{dz\,d^2x-dx\,d^2z}{dx\,d^2y-dy\,d^2x}.$$

Da einer der Koefficienten A, B, C beliebig gewählt werden kann, setzen wir

$$C=dx\,d^2y-dy\,d^2x,$$

wodurch

$$A=dy\,d^2z-dz\,d^2y,\quad B=dz\,d^2x-dx\,d^2z$$

wird, und erhalten somit als Gleichung der oskulierenden Ebene

$$(dy\,d^2z - dz\,d^2y)\,(X-x) + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)\,(Y-y)$$
$$+ (dx\,d^2y - dy\,d^2x)\,(Z-z) = 0. \qquad (6)$$

Um diese Gleichung leicht zu behalten, kann man sich des folgenden mnemonischen Hilfsmittels bedienen. Man schreibe die Brüche hin

$$\frac{dx}{d^2x},\ \frac{dy}{d^2y},\ \frac{dz}{d^2z},\ \frac{dx}{d^2x},$$

und ziehe jeden von ihnen von dem ihm vorhergehenden ab; die Zähler der erhaltenen Differenzen sind dann bezw. die Koëfficienten von $Z-z$, $X-x$, $Y-y$.

Winkel zwischen der oskulierenden Ebene und den Koordinatenebenen.

286. Sind λ, μ, ν die Winkel, die eine auf der oskulierenden Ebene errichtete Senkrechte MP mit den Koordinatenaxen Ox, Oy, Oz bildet, so sind diese bezw. gleich den Winkeln, die die oskulierende Ebene mit der yz-, xz- und xy-Ebene einschliesst. Setzt man nun

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

d. h.

$$D^2 = (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2 + (dz\,d^2x - dx\,d^2z)^2 + (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2, \quad (m)$$

so wird

$$\cos\lambda = \frac{A}{D},\ \cos\mu = \frac{B}{D},\ \cos\nu = \frac{C}{D}. \qquad (\alpha)$$

287. Der Ausdruck für D^2 kann auch auf eine andere Form gebracht werden. Setzen wir zur Abkürzung

$$dx = a,\ dy = b,\ dz = c,$$
$$d^2x = a',\ d^2y = b',\ d^2z = c',$$

so wird

$$D^2 = (bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2,$$

oder

$$D^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2.$$

Bezeichnet nun ds das Differenzial des im Punkte M endigenden Bogens, so ist

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

woraus man durch Differentiation nach t und Division mit 2 erhält

$$ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z = aa' + bb' + cc'.$$

Folglich wird

$$D^2 = ds^2\,[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2],$$

und

$$D = ds\,\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}. \tag{n}$$

Man kann auch schreiben

$$D = \sqrt{(ds\,d^2x - dx\,d^2s)^2 + (ds\,d^2y - dy\,d^2s)^2 + (ds\,d^2z - dz\,d^2s)^2},$$

wie durch Entwickelung zu beweisen ist, oder auch

$$D = ds^3\sqrt{\left(\frac{d\,\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\,\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\,\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2}. \tag{p}$$

In allen diesen Ausdrücken ist die unabhängige Veränderliche beliebig.

Hauptnormale.

288. Die in der oskulierenden Ebene liegende Normale heisst *Hauptnormale*. Sie muss senkrecht zur Tangente MT und zur Normale MP sein. Nun folgt aus der Identität

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{dx}{ds}\,d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d\frac{dz}{ds} = 0, \tag{1}$$

und andrerseits kann die Gleichung

$$A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0$$

auch geschrieben werden:

$$A\,d\frac{dx}{ds} + B\,d\frac{dy}{ds} + C\,d\frac{dz}{ds} = 0. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) zeigen, dass die Gerade, die mit den Axen Winkel bildet, deren Cosinus proportional

$$d\frac{dx}{ds},\ d\frac{dy}{ds},\ d\frac{dz}{ds}$$

sind, senkrecht auf der Tangente MT und der Normale MP steht; dieselbe ist also die gesuchte Linie.

Hiernach sind die Gleichungen der Hauptnormale

$$\frac{X - x}{d \frac{dx}{ds}} = \frac{Y - y}{d \frac{dy}{ds}} = \frac{Z - z}{d \frac{dz}{ds}}. \tag{3}$$

Übungen.

1. Eine auf der Oberfläche eines geraden Kegels gezogene Kurve hat als orthogonale Projektion auf eine zur Axe des Kegels senkrechte Ebene eine logarithmische Spirale $r = e^{m\vartheta}$, deren Pol der Scheitel ist. Die Gleichung der Tangente und der Normalebene in einem gegebenen Punkte dieser Kurve sind aufzustellen, und es ist zu beweisen, dass diese Kurve alle Seiten des Kegels unter konstantem Winkel schneidet.

Auflösung.

Ist α der Kegelwinkel, so sind die Cosinus der Winkel, die die Tangente mit den Axen bildet

$$\frac{m \cos\vartheta - \sin\vartheta}{\sqrt{1 + \frac{m^2}{\sin^2\alpha}}}, \quad \frac{m \sin\vartheta + \cos\vartheta}{\sqrt{1 + \frac{m^2}{\sin^2\alpha}}}, \quad \frac{m \cot\alpha}{\sqrt{1 + \frac{m^2}{\sin^2\alpha}}}.$$

Die Tangente bildet mit der Seite des Kegels einen Winkel, dessen Cotangente $\frac{m}{\sin\alpha}$ ist. Die Gleichung der Normalebene ist

$$(X - x)(m x - y) + (Y - y)(m y + x) + (Z - z) m z = 0.$$

2. Eine Kurve ist gegeben durch zwei Gleichungen zwischen dem Abstande r eines beliebigen auf ihr liegenden Punktes M von einem festen Punkte O, dem Winkel ϑ, den der Radius vector OM mit einer festen Geraden Ox bildet, und dem Winkel φ, den die Ebene MOx mit einer festen Ebene xOy einschliesst: man soll das Differential ihres Bogens als Funktion der Grössen r, ϑ, φ und ihrer Differentiale darstellen.

Auflösung.

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2}.$$

3. Der geometrische Ort der Normalen der Fläche

$$a^2 y^2 = x^2 (b^2 - z^2)$$

ist zu bestimmen, die durch alle Punkte der vollständig in der Fläche liegenden Geraden

$$z = k, \; a y = x \sqrt{b^2 - k^2}$$

gezogen sind.

Auflösung.

Das hyperbolische Paraboloid

$$a k (a x + y \sqrt{b^2 - k^2}) (x \sqrt{b^2 - k^2} - a y)$$
$$+ (a^2 + b^2 - k^2)^2 \sqrt{b^2 - k^2} (z - k) = 0.$$

Fünfundzwanzigste Lektion.

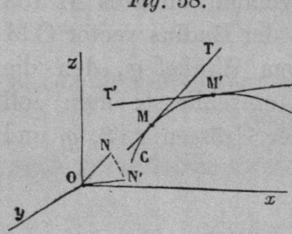
Krümmung der Linien im Raume. — Schraubenlinie.

Krümmung der Linien im Raum. — Krümmungskreis. — Radius der Torsion oder zweiten Krümmung. — Gleichung der Schraubenlinie. — Tangente. — Radius und Mittelpunkt der Krümmung. — Ort der Krümmungsmittelpunkte. — Oskulierende Ebene und Torsionswinkel.

Krümmung der Linien im Raume.

289. Der Winkel ω, den die zwei an die Endpunkte eines Kurvenbogens $M M' = \Delta s$ gezogenen Tangenten miteinander bilden, heisst, bei ebenen wie bei Raumkurven, wenn der Bogen unendlich klein wird, *Kontingenzwinkel*, und die Grenze der sich das Verhältnis $\frac{\omega}{\Delta s}$ für unendlich klein werdende Δs nähert, wird als *Krümmung im Punkte* M bezeichnet.

Fig. 58.



Diese Grenze wird durch $\frac{\omega}{d s}$ dargestellt; der reciproke Wert der Krümmung oder $\frac{d s}{\omega}$ wird der Krümmungsradius im Punkte M genannt. Wir werden ihn mit ϱ bezeichnen.

290. Um ω zu bestimmen, ziehen wir durch den Punkt O parallel den beiden Tangenten M T und M' T', die der Längeneinheit gleichen Geraden O N und O N', und es seien

$$a = \frac{d x}{d s}, \quad b = \frac{d y}{d s}, \quad c = \frac{d z}{d s}$$

die Cosinus der Winkel die M T oder O N mit den Axen einschliesst, oder, was dasselbe ist, die Koordinaten des Punktes N, und a' b' c' die Koordinaten des Punktes N'. Dann ist, da der Winkel N O N' $= \omega$,

$$N N' = 2 O N \sin \frac{1}{2} \omega = \sqrt{(a'-a)^2 + (b'-b)^2 + (c'-c)^2},$$

oder, da O N = 1,

$$2 \sin \frac{1}{2} \omega = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}.$$

Gehen wir zur Grenze über und setzen dann für den Sinus des Winkels $\frac{1}{2} \omega$ den Winkel selbst, so erhalten wir

$$\omega = \sqrt{d a^2 + d b^2 + d c^2},$$

und folglich

$$\frac{\omega}{d s} = \frac{1}{\varrho} = \sqrt{\frac{d a^2}{d s^2} + \frac{d b^2}{d s^2} + \frac{d c^2}{d s^2}}.$$

Setzt man also für a, b, c ihre Werte ein, so wird

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left(\frac{d \frac{d x}{d s}}{d s}\right)^2 + \left(\frac{d \frac{d y}{d s}}{d s}\right)^2 + \left(\frac{d \frac{d z}{d s}}{d s}\right)^2},$$

wobei die unabhängige Veränderliche beliebig gewählt werden kann.

291. Zufolge der Formel p in Nr. **287** haben wir

$$\varrho = \frac{d s^3}{D},$$

und wenn wir zwei der a. a. O. für D gefundenen Formen benutzen, ist auch

$$\varrho = \frac{d s^2}{\sqrt{(d^2 x)^2 + (d^2 y)^2 + (d^2 z)^2 - (d^2 s)^2}},$$

$$\varrho = \frac{d s^3}{\sqrt{(d y d^2 z - d z d^2 y)^2 + (d z d^2 x - d x d^2 z)^2 + (d x d^2 y - d y d^2 x)}}.$$

292. Die Hauptnormale M N bildet mit den Koordinatenaxen die Winkel l, m, n, deren Cosinus proportional

$$\frac{d \frac{d x}{d s}}{d s}, \quad \frac{d \frac{d y}{d s}}{d s}, \quad \frac{d \frac{d z}{d s}}{d s}$$

sind; demnach ist

$$\cos l = \varrho \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds}, \ \cos m = \varrho \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds}, \ \cos n = \varrho \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds}.$$

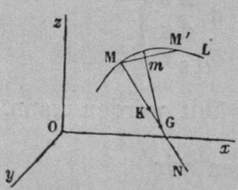
Nun hat die Normale M N die Gleichungen $X - x = R \cos l$, $Y - y = R \cos m$, $Z - z = R \cos n$, worin R der Abstand des Punktes M von einem beliebigen Punkte (X, Y, Z) dieser Normalen ist. Werden für cos l, cos m, cos n die eben gefundenen Werte eingesetzt, so können also diese Gleichungen auf die Form gebracht werden

$$X - x = R\varrho \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds}, \ Y - y = R\varrho \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds}, \ Z - z = R\varrho \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds}. \quad \text{(a)}$$

Oskulierender Kreis.

293. Wird durch die Mitte der Sehne M M' und senkrecht zu ihr eine Ebene gelegt, die die Hauptnormale M N im Punkte G schneidet, so ist dieser der Mittelpunkt eines Kreises, der durch die beiden Punkte M und M' geht. Nähert sich der Punkt M' unbeschränkt dem Punkte M, so wird die Ebene N M M' in die oskulierende Ebene T M N übergehen, und der Kreis wird an der Grenze der im Punkte M *oskulierende Kreis* der Kurve.

Fig. 59.



Der Radius des im Punkte M oskulierenden Kreises ist gleich dem Krümmungsradius in diesem Punkte.

Denn die Gleichung der durch die Mitte der Sehne M M' senkrecht zu ihr gelegten Ebene ist

$$\Delta x \left(X - x - \frac{1}{2} \Delta x\right) + \Delta y \left(Y - y - \frac{1}{2} \Delta y\right)$$
$$+ \Delta z \left(Z - z - \frac{1}{2} \Delta z\right) = 0,$$

oder

$$(X - x) \Delta x + (Y - y) \Delta y + (Z - z) \Delta z = \frac{1}{2} (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2).$$

Eliminiert man $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ zwischen dieser Gleichung und den Gleichungen der Normalen (a), so wird

$$R\varrho\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\Delta x+\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\Delta y+\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\Delta z\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2).$$

Werden aber x, y, z als Funktionen von s betrachtet, so ist

$$\Delta x=\Delta s\frac{dx}{ds}+\frac{\Delta s^2}{2}\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}+\alpha\right)$$

$$\Delta y=\Delta s\frac{dy}{ds}+\frac{\Delta s^2}{2}\left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}+\beta\right)$$

$$\Delta z=\Delta s\frac{dz}{ds}+\frac{\Delta s^2}{2}\left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}+\gamma\right),$$

worin α, β, γ mit Δs verschwinden.

Setzt man diese Werte in die vorhergehende Gleichung ein und lässt die Δs als Faktor enthaltenden Glieder, deren Summe Null ist, fort, so wird

$$R\varrho\left[\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2+\alpha\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}+\ldots\right]$$

$$=\frac{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}{\Delta s^2},$$

und beim Übergang zur Grenze

$$\varrho\cdot\frac{1}{\varrho^2}\cdot\lim R=1,$$

oder

$$\lim R=\varrho.$$

Also *der Radius des im Punkte M oskulierenden Kreises ist gleich dem Krümmungsradius in diesem Punkte.*

Daher heisst der Punkt K, der die Grenze des Punktes G ist, unterschiedslos *Krümmungsmittelpunkt* oder *Mittelpunkt des oskulierenden Kreises.*

294. Ähnlich wird bewiesen, dass der Schnittpunkt der Hauptnormalen MN mit der zur Kurve normalen, durch den Punkt M' gehenden Ebene an der Grenze ebenfalls der Punkt K oder der Krümmungsmittelpunkt ist.

Denn die Gleichung dieser Ebene ist

$$\left(\frac{dx}{ds}+\varDelta\frac{dx}{ds}\right)(X-x-\varDelta x)+\left(\frac{dy}{ds}+\varDelta\frac{dy}{ds}\right)(Y-y-\varDelta y)$$
$$+\left(\frac{dz}{ds}+\varDelta\frac{dz}{ds}\right)(Z-z-\varDelta z)=0.$$

Setzen wir für $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ ihre aus der Gleichung der Hauptnormalen [**292** (a)] entnommenen Werte, so wird

$$R\varrho\left[\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\left(\frac{dx}{ds}+\varDelta\frac{dx}{ds}\right)+\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\left(\frac{dy}{ds}+\varDelta\frac{dy}{ds}\right)+\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\left(\frac{dz}{ds}+\varDelta\frac{dz}{ds}\right)\right]$$
$$=\varDelta x\frac{dx}{ds}+\varDelta y\frac{dy}{ds}+\varDelta z\frac{dz}{ds}+\varDelta x\varDelta\frac{dx}{ds}+\varDelta y\varDelta\frac{dy}{ds}+\varDelta z\varDelta\frac{dz}{ds}.$$

Diese Gleichung ist mittels der folgenden Bemerkungen sehr zu vereinfachen.

Erstens ist

$$\frac{dx}{ds}\,d\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}\,d\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}\,d\frac{dz}{ds}=0$$

und nach Division durch $\varDelta s$ bleibt

$$R\varrho\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\,\frac{\varDelta\frac{dx}{ds}}{\varDelta s}+\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\,\frac{\varDelta\frac{dy}{ds}}{\varDelta s}+\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\,\frac{\varDelta\frac{dz}{ds}}{\varDelta s}\right)$$
$$=\frac{\varDelta x}{\varDelta s}\frac{dx}{ds}+\frac{\varDelta y}{\varDelta s}\frac{dy}{ds}+\frac{\varDelta z}{\varDelta s}\frac{dz}{ds}+\frac{\varDelta x}{\varDelta s}\varDelta\frac{dx}{ds}+\frac{\varDelta y}{\varDelta s}\varDelta\frac{dy}{ds}+\frac{\varDelta z}{\varDelta s}\varDelta\frac{dz}{ds}$$

Beachtet man, dass

$$\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2=\frac{1}{\varrho^2}$$

ist, so wird der Grenzwert der linken Seite $\frac{1}{\varrho}\lim R$.

Ferner ist der Grenzwert der rechten Seite

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 \text{ oder } 1.$$

Also wird

$$\frac{1}{\varrho}\lim R=1,\quad\text{oder}\ \lim R=\varrho,$$

was zu beweisen war.

295. Hiernach kann man den Mittelpunkt der Krümmung im Punkte M als den Schnittpunkt der in M oskulierenden Ebene mit zwei Normalebenen auffassen, von denen die eine durch den Punkt M, die andere durch einen unendlich nahen Punkt gelegt ist.

Um die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes K zu erhalten, müssen in den Gleichungen der Normalen [**292**, (a)] ξ, η, ζ an die Stelle von X, Y, Z gesetzt werden. Beachtet man, dass alsdann R gleich ϱ wird, so erhält man

$$\xi - x = \varrho^2 \frac{d \frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \eta - y = \varrho^2 \frac{d \frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \zeta - z = \varrho^2 \frac{d \frac{dz}{ds}}{ds},$$

wodurch ξ, η, ζ als Funktionen der Koordinaten des Punktes M gegeben werden.

Torsionswinkel. — Radius der zweiten Krümmung.

296. Es seien a, b, c die Cosinus der Winkel, welche die Senkrechte, die auf der in M oskulierenden Ebene errichtet ist, mit den Koordinatenaxen bildet; ist dann Φ der Winkel zwischen dieser oskulierenden Ebene und der benachbarten, so wird, wie in Nr. **290**

$$2 \sin \frac{1}{2} \Phi = = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2}$$

Geht man zur Grenze über und bezeichnet den Wert, den dann Φ annimmt, d. h. den Winkel zwischen zwei unendlich nahen oskulierenden Ebenen, mit φ, so ist

$$\varphi = \sqrt{da^2 + db^2 + dc^2},$$

oder

$$\varphi = \sqrt{(d \cos \lambda)^2 + (d \cos \mu)^2 + (d \cos \nu)^2},$$

wenn λ, μ, ν die Winkel sind, welche die Senkrechte, die auf der im Punkte M oskulierenden Ebene errichtet ist, mit den Axen O x, O y, O z bildet. Ferner ist

$$\cos \lambda = \frac{dy\, d^2z - dz\, d^2y}{D},$$

$$\cos \mu = \frac{dz\, d^2x - dx\, d^2z}{D}$$

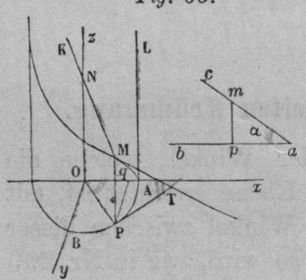
$$\cos \nu = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{D}.$$

297. Der unendlich kleine Winkel φ, den zwei unmittelbar aufeinander folgende oskulierende Ebenen miteinander bilden, heisst *Torsionswinkel*, und das Verhältnis von φ zu ds heisst *zweite Krümmung* oder *Torsion*. Nimmt man ds konstant an, so wird die zweite Krümmung dem Winkel φ proportional.

Analog wie für die erste Krümmung wird das Verhältnis $\frac{\varphi}{ds}$ durch $\frac{1}{r}$ dargestellt, so dass $r = \frac{ds}{\varphi}$ ist, und man nennt r den *Radius der zweiten Krümmung* oder *Torsionsradius*.

Definition und Gleichungen der Schraubenlinie.

Fig. 60.



298. Wird die Ebene eines Winkels $cab = \alpha$ auf einen geraden Kreiscylinder OABL so aufgerollt, dass die Seite ab genau auf den Umfang AB zu liegen kommt, so heisst die von der Seite ac beschriebene Kurve eine Schraublinie.

299. Wir wählen als x-Axe die Gerade OA, die durch den Punkt A geht, der der Anfangspunkt der Schraubenlinie ist; als y-Axe ein im Mittelpunkte der Grundfläche auf Ox errichtetes Lot; als z-Axe, die Axe des Cylinders, und es seien $x = Oq$, $y = Pq$, $z = MP$ die Koordinaten des Punktes M. Ferner bezeichnen wir mit m die Tangente des Winkels α, mit u den Winkel AOP und mit R den Cylinderradius: dann wird

$$x = R\cos u,\quad y = R\sin u,\quad z = mRu; \tag{a}$$

denn es ist

$$z = \overline{mp} = \overline{pa}\ \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{arc} AP \,.\, \operatorname{tang}\alpha = mRu.$$

Die Elimination von u zwischen den Gleichungen (a) giebt die Gleichungen der Schraubenlinie

$$x = R\cos\frac{z}{mR},\ y = R\sin\frac{z}{mR};$$

es ist jedoch besser, die drei Gleichungen (a) mit der Hilfsveränderlichen u beizubehalten.

Die Tangente der Schraubenlinie.

300. Die Cosinus der Winkel, die die durch den Punkt M (x, y, z) gezogene Tangente MT mit den Axen bildet, sind $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.

Es ist aber

$$dx = -R \sin u \, du, \quad dy = R \cos u \, du, \quad dz = mR \, du,$$
$$ds = R \sqrt{1+m^2} \, du;$$

also wird

$$\frac{dx}{ds} = \frac{-\sin u}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\cos u}{\sqrt{1+m^2}}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}.$$

Die Formel $\frac{dz}{ds} = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \sin \alpha$ zeigt, dass *die Tangente MT mit den Erzeugenden einen konstanten Winkel bildet, der dem Komplement von α gleich ist*, und dass folglich *der Winkel, den sie mit der Grundfläche des Cylinders bildet, ebenfalls konstant und gleich α ist.*

Wir haben

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos u}{\sin u} = -\frac{1}{\operatorname{tang} u};$$

$\frac{dy}{dx}$ ist aber der Winkelkoëfficient der Geraden PT, und tang u derjenige der Linie OP. Diese beiden Geraden stehen also senkrecht auf einander; die Projektion der Tangente der Schraubenlinie auf die xy-Ebene ist somit die Tangente der Cylinderbasis im Punkte P.

Radius und Mittelpunkt der Krümmung.

301. Der Krümmungsradius im Punkte M ist durch die Formel gegeben

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2}}.$$

Aus den in der vorhergehenden Nummer gefundenen Formeln folgt aber

$$\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} = -\frac{\cos u}{R(1+m^2)}, \quad \frac{d\frac{dy}{ds}}{ds} = -\frac{\sin u}{R(1+m^2)}, \quad \frac{d\frac{dz}{ds}}{ds} = 0;$$

demnach ist

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 u + \sin^2 u}{R^2(1+m^2)^2}}} = R(1+m^2).$$

Also *der Krümmungsradius hat für alle Punkte der Schraubenlinie denselben Wert.*

302. Die Hauptnormale der Schraubenlinie im Punkte M bildet mit den Axen Winkel, deren Cosinus proportional zu $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$, oder zu cos u, sin u und 0 sind. Diese Gerade ist demnach parallel zu O P; der Krümmungsradius liegt folglich in Richtung des Cylinderradius. Die zur Axe senkrechte Gerade M N und die Tangente M T bestimmen die oskulierende Ebene, und wenn man $NK = m^2 R$ nimmt, ist K der Krümmungsmittelpunkt der Schraubenlinie für den Punkt M. Da ferner der Krümmungsradius konstant und stets grösser als der Cylinderradius ist, *so ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Schraubenlinie eine zweite Schraubenlinie, die denselben Gang hat, aber umgekehrt liegt.*

303. Wenn der Punkt M sich auf der Schraubenlinie bewegt, beschreibt die Gerade M N eine Konoidflläche, die *Schraubenfläche* genannt wird. Die Ebene N M T berührt diese Fläche im Punkte M, da sie durch die erzeugende Gerade M N und durch die Tangente M T der auf dieser Fläche liegenden Schraubenlinie geht. Um die Gleichung dieser Fläche zu erhalten, genügt es, u zwischen den Gleichungen

$$z = mRu, \quad y = x \operatorname{tang} u$$

zu eliminieren, die die Gerade M N darstellen. Man erhält so

$$y = x \operatorname{tang} \frac{z}{mR}.$$

Oskulierende Ebene. — Winkel und Radius der Torsion.

304. Es ist

$$dx = -R\sin u\,du, \quad dy = R\cos u\,du, \quad dz = mR\,du,$$
$$d^2x = -R\cos u\,du^2, \quad d^2y = -R\sin u\,du^2, \quad d^2z = 0,$$

unf folglich

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = R^2 du^3,$$
$$dz\,d^2x - dx\,d^2z = -mR^2 \cos u\, du^3,$$
$$dy\,d^2z - dz\,d^2y = mR^2 \sin u\, du^3.$$

Also erhält die Gleichung der oskulierenden Ebene nach Division mit dem gemeinsamen Faktor $R^2 du^3$ die Gestalt

$$m \sin u\,(X - x) - m \cos u\,(Y - y) + Z - z = 0.$$

305. Ist φ der Torsionswinkel, so ist, wie wir wissen,

$$\varphi = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2},$$

worin λ, μ, ν die Winkel sind, die die im Punkte M auf der oskulierenden Ebene errichtete Senkrechte mit den Axen bildet. Nun ist

$$\cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}},\quad \cos\mu = \frac{m\cos u}{\sqrt{1+m^2}},\quad \cos\lambda = \frac{m\sin u}{\sqrt{1+m^2}},$$

und folglich

$$d\cos\nu = 0,\quad d\cos\mu = -\frac{m \sin u\, du}{\sqrt{1+m^2}},\quad d\cos\lambda = \frac{m\cos u\, du}{\sqrt{1+m^2}};$$

also wird

$$\varphi = \sqrt{\frac{m^2 \sin^2 u}{1+m^2} + \frac{m^2 \cos^2 u}{1+m^2}}\, du = \frac{m\, du}{\sqrt{1+m^2}},$$

$$\frac{\varphi}{ds} = \frac{m\,du}{\sqrt{1+m^2}} : R\sqrt{1+m^2}\, du = \frac{m}{1+m^2}\,\frac{1}{R}\,.$$

Die zweite Krümmung ist demnach ebensowohl wie die erste konstant.

Übung.

Zu bestimmen: der Krümmungsradius und die oskulierende Ebene der Kurve

$$x^2 + y^2 = ax,\quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Auflösung. — Es ist der Krümmungsradius:

$$\varrho = \frac{(a+x)^{\frac{3}{2}}}{(5a+3x)^{\frac{1}{2}}};$$

die oskulierende Ebene:

$$[2xy^2 - a(y^2 - z^2)]\,X + 2y^3\,Y + 2z^3\,Z = a^2 z^2 + 2ax(y^2 - z^2).$$

Sechsundzwanzigste Lektion.

Singuläre Punkte der ebenen Kurven.

Wendepunkte. — Vielfache Punkte. — Rückkehrpunkte. — Isolierte Punkte. — Endpunkte. — Eckpunkte.

Definition der singulären Punkte der ebenen Kurven. — Wendepunkte.

306. Diejenigen Punkte einer Kurve, welche irgend eine merkwürdige Eigentümlichkeit besitzen, die von der Lage der Kurve in Bezug auf die Koordinatenaxen unabhängig ist, heissen *singuläre Punkte.* Im Folgenden kommen nur ebene Kurven in Betracht.

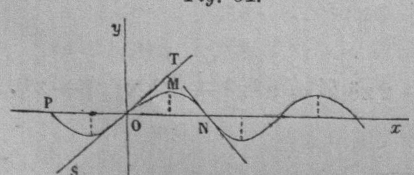
Da wir von den Wendepunkten schon (**206**) gesprochen haben, wollen wir hier nur einige Beispiele dafür geben.

307. Wir betrachten zunächst die Sinusoide

$$y = \sin x.$$

Für $x = 0$ und allgemein für $x = \pm m\pi$, wenn m eine ganze Zahl bezeichnet, ist $y = 0$; die Kurve trifft demnach die x-Axe in unendlich vielen Punkten, die man erhält, wenn man auf ihr vom Koordinatenursprunge aus nach beiden Seiten dem Halbkreise gleiche Längen abträgt. Die Kurve setzt sich aus unzähligen identisch gleichen Teilen zusammen, die aber abwechselnd über und unter der x-Axe liegen. Die Maxima und Minima der Ordinaten, die ihrem absoluten Betrage nach der Einheit gleich sind, entsprechen den Abscissen $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots\ldots$

Fig. 61.



Aus der Gleichung der Kurve erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \cos x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x.$$

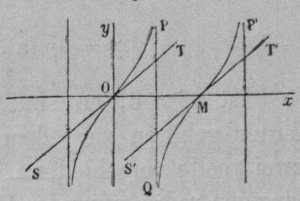
Die zweite Ableitung verschwindet und ändert ihr Vorzeichen für $x = \pm m\pi$; folglich sind die Punkte P, O, N, ... worin die Kurve die x-Axe trifft, Wendepunkte, und da für $x = \pm m\pi$ die erste Ableitung gleich ± 1 ist, bildet die Tangente der Kurve in diesen Punkten immer einen Winkel von 45° oder 135° mit der Axe.

308. Ferner sei die Kurve gegeben

$$y = \operatorname{tang} x.$$

Für $x = 0$ und allgemein für $x = \pm m\pi$, wird $y = 0$. Die Kurve trifft also die x-Axe im Koordinatenursprunge und in unzähligen anderen gleich weit von einander abstehenden Punkten.

Fig. 62.



Für $x = \frac{\pi}{2}$ wird $y = \infty$, ist x nur wenig kleiner als $\frac{\pi}{2}$, so wird tang x sehr gross und positiv. Ist die Abscisse etwas grösser als $\frac{\pi}{2}$, so wird tang x sehr gross, aber negativ. Die Kurve besitzt also als Asymptote die Gerade, deren Gleichung $x = \frac{\pi}{2}$ ist. Ferner dehnt sie sich offenbar zu beiden Seiten der y-Axe ins Unendliche aus und besteht aus einer unbegrenzten Anzahl identisch gleicher Zweige.

Durch Differentiation erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\cos x \sin x}{\cos^4 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x},$$

und wenn man $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ setzt, so zeigt sich, dass alle Punkte, worin die Kurve die x-Axe trifft, Wendepunkte sind.

Vielfache Punkte.

309. Ein Punkt, durch den mehrere Zweige ein und derselben Kurve gehen, heisst ein *vielfacher Punkt.* Man erkennt einen derartigen Punkt daran, dass die Kurve in ihm mehrere Tangenten besitzt. Den Fall, dass diese Tangenten in eine zusammenfallen, übergehen wir.

Das folgende Beispiel, worin y eine explicite Funktion von x ist, ist ziemlich allgemein. Es sei

$$y = \varphi(x) \pm (x - a)(x - b)^{\frac{p}{q}},$$

wenn $\frac{p}{q}$ ein irreduzibler Bruch und dessen Nenner q eine gerade Zahl ist. Das Glied $(x-a)(x-b)^{\frac{p}{q}}$ hat für jeden passenden Wert von x zwei reelle Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen, was dadurch angezeigt werde, dass dieses Glied das Zeichen $\pm$ erhält.

Aus der vorstehenden Gleichung erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \pm (x-b)^{\frac{p}{q}} \pm \frac{p}{q}(x-a)(x-b)^{\frac{p}{q}-1}.$$

Für $x = a$ wird

$$y = \varphi(a), \quad \frac{dy}{dx} = \varphi'(a) \pm (a-b)^{\frac{p}{q}}.$$

Ist $a > b$, so sind zwei verschiedene Tangenten vorhanden; ferner gehören zu jedem von a wenig verschiedenen Werte von x zwei reelle verschiedene Werte von y, die sich für $x = a$ auf einen einzigen reduzieren: der Punkt mit den Koordinaten $x = a$, $y = \varphi(a)$ ist also ein Doppelpunkt.

Aber für $a < b$ wird $\frac{dy}{dx}$ imaginär, und es giebt in diesem Punkte keine Tangente. Denn da für Werte von x, die von a sehr wenig verschieden sind, $x-b$ negativ ist, so werden die entsprechenden Ordinaten imaginär; es ist also in der Nähe des betrachteten Punktes kein Kurvenpunkt vorhanden. Später (**315**) werden wir auf diese Gattung singulärer Punkte zurückkommen.

310. Ist die Gleichung der Kurve

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

in Bezug auf y nicht aufgelöst, so erhält man daraus durch Differentiation

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} = 0. \tag{2}$$

In einem vielfachen Punkte der Kurve muss $\frac{dy}{dx}$ mehrere reelle von einander verschiedene Werte haben; da aber die Gleichung (2) in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ vom ersten Grade ist, so ist dieses nur möglich, wenn zugleich

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0. \tag{3}$$

Um die vielfachen Punkte zu erhalten, muss man also zunächst die Punkte aufsuchen, deren Koordinaten den Gleichungen (1) und (3) genügen.

Da sich die Gleichung (2) alsdann auf $0 = 0$ reduziert, kann aus ihr der Wert von $\frac{dy}{dx}$ nicht bestimmt werden. Man muss also die Differentialgleichung

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{df}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

zu Hilfe nehmen, oder, da $\frac{df}{dy} = 0$ ist, die Gleichung

$$\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{d^2f}{dx\,dy}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0. \qquad (4)$$

Angenommen, die drei Koefficienten $\frac{d^2f}{dx^2}$, $\frac{d^2f}{dx\,dy}$, $\frac{d^2f}{dy^2}$ sind nicht alle Null und die Gleichung (4) ergiebt für $\frac{dy}{dx}$ zwei reelle und verschiedene Werte; so folgt, dass in dem betrachteten Punkte zwei Tangenten vorhanden sind, und sich demnach zwei Zweige der Kurve in ihm durchkreuzen: derselbe ist also ein Doppelpunkt.

Würden drei Zweige der Kurve in diesem Punkte zusammentreffen, so müssten in ihm drei Tangenten vorhanden sein, und da die Gleichung (4) in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ nur vom zweiten Grade ist und somit nicht drei Werte dafür geben kann, so müsste gleichzeitig sein

$$\frac{d^2f}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2f}{dx\,dy} = 0, \quad \frac{d^2f}{dy^2} = 0.$$

Die Werte von $\frac{dy}{dx}$ wären dann durch Differentiation der Gleichung (4) zu erhalten. Man erkennt hieraus, wie zu verfahren ist, wenn sich eine grössere Anzahl von Zweigen in einem Punkte (x, y) treffen.

311. Als Beispiel betrachten wir die Kurve

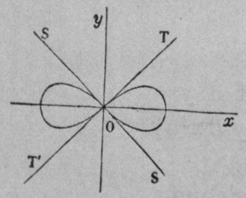
$$y^2 = x^2(1 - x^2), \text{ oder } y = \pm x\sqrt{1 - x^2}.$$

Diese Kurve ist symmetrisch in Bezug auf die x-Axe und die y-Axe. Sie schneidet die x-Axe im Koordinatenursprung und in den beiden Punkten mit den Abscissen $x = 1$ und $x = -1$.

Durch Differentiation der Gleichung der Kurve erhält man

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{1-x^2} \mp \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \pm\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Fig. 63.



Für $x = 0$ reduzieren sich die beiden Werte von y auf einen einzigen nämlich 0. Ferner ist für diesen Punkt

$$\frac{dy}{dx} = \pm 1.$$

Der Koordinatenursprung ist also ein Doppelpunkt. Die Tangenten TT' und SS' halbieren in ihm die Axenwinkel.

Die zweite Ableitung ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{\frac{x(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}} - 4x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)} = \pm\frac{2x^3-3x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

für $x = 0$ ist $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; also der Ursprung ist zugleich ein Doppel- und ein Wendepunkt.

Rückkehrpunkte.

312. Ein Punkt, worin zwei Kurvenzweige endigen und eine gemeinsame Tangente haben, heisst ein *Rückkehrpunkt.* In diesem Falle müssen zwei Werte von y, die reell sind, wenn x grösser oder kleiner als die Abscisse des betreffenden Punktes ist, imaginär werden, ~~werden~~, wenn x kleiner oder grösser als diese Abscisse ist, und überdies müssen zwei Werte von $\frac{dy}{dx}$ unter sich gleich werden.

Die Rückkehr ist von der *ersten* oder der *zweiten Art* je nachdem die beiden Zweige zu beiden Seiten (Fig. 65) oder auf einer Seite (Fig. 64) ihrer gemeinsamen Tangente liegen. Nachdem über die Konvexität ebener Kurven Festgestellten **(205)** wird die Art der Rückkehr aus dem Vorzeichen zu erkennen sein, das $\frac{d^2y}{dx^2}$ auf den beiden Zweigen in der Nähe des betreffenden Punktes besitzt.

313. Es sei die Kurve gegeben

$$y = \varphi(x) \pm (x-a)^{\frac{p}{q}}\,\psi(x),$$

wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ für nahe bei a liegende Werte von x zwei reelle, endliche Funktionen sind. Ferner sei der Bruch $\frac{p}{q}$ positiv, irreduzibel und sein Nenner gerade. Alsdann hat für jeden Wert von x, der grösser als a ist, der Ausdruck $(x-a)^{\frac{p}{q}}\psi(x)$ zwei reelle entgegengesetzt gleiche Werte, was durch das Zeichen $\pm$ angezeigt werde.

Die beiden Werte von y, die für $x > a$ reell und ungleich sind, werden gleich für $x = a$ und imaginär für $x < a$. Die beiden Zweige der Kurve vereinigen sich also und endigen in einem Punkte mit den Koordinaten $x = a$, $y = \varphi(a)$.

Es ist nun noch zu untersuchen, ob die beiden Zweige in diesem Punkte eine gemeinsame Tangente haben.

Aus der Gleichung der Kurve folgt

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) \pm \frac{p}{q}(x-a)^{\frac{p}{q}-1}\psi(x) \pm (x-a)^{\frac{p}{q}}\psi'(x).$$

Ist $\frac{p}{q} > 1$, so hat $\frac{dy}{dx}$ für $x = a$ nur den einen Wert $\varphi'(a)$. Die beiden Zweige haben also in dem betrachteten Punkte eine Tangente, derselbe ist ein Rückkehrpunkt.

Um zu erkennen, ob der Rückkehrpunkt von der ersten oder zweiten Art ist, berechnen wir $\frac{d^2y}{dx^2}$. Es ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''(x) \pm \frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)(x-a)^{\frac{p}{q}-2}\psi(x)$$

$$\pm 2\frac{p}{q}(x-a)^{\frac{p}{q}-1}\psi'(x) \pm (x-a)^{\frac{p}{q}}\psi''(x).$$

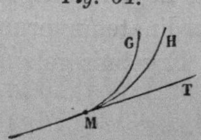
Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. $$\frac{p}{q} - 2 > 0.$$

Für $x = a$ wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''(a).$$

Fig. 64.



Vorausgesetzt, $\varphi''(a)$ wird nicht Null, hat $\frac{d^2y}{dx^2}$ auf beiden Zweigen dasselbe Vorzeichen, dann und die Kurve zeigt demnach eine Rückkehr zweiter Art (Fig. 64).

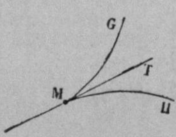
2. $$\frac{p}{q} - 2 < 0.$$

Ist x sehr wenig grösser als a, so wird der Ausdruck

$$\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q} - 1\right)(x - a)^{\frac{p}{q} - 2}\psi(x) \tag{1}$$

seinem absoluten Betrage nach sehr gross, wogegen die übrigen Glieder von $\frac{d^2 y}{dx^2}$, ausgenommen das erste $\psi''(x)$ gegen die Null konvergieren, wenn x sich a nähert.

Fig. 65.



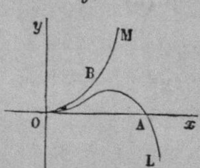
Also der Ausdruck (1) bestimmt durch sein Vorzeichen dasjenige von $\frac{d^2 y}{dx^2}$, und da er ein doppeltes Vorzeichen hat, folgt, dass im Punkte $[x = a, y = \varphi(a)]$ die beiden Zweige zu verschiedenen Seiten der gemeinsamen Tangente liegen. Die Rückkehr ist in diesem Falle von der ersten Art.

314. Als Beispiel betrachten wir die Kurve

$$y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}.$$

Einem positiven Werte von x entsprechen immer zwei reelle Werte von y, die für $x = 0$ einander gleich sind. Kein Punkt der Kurve liegt auf der Seite der negativen x. Auf der Seite der positiven Abscissen hat sie zwei Zweige, die sich ins Unendliche ausdehnen; der eine auf der Seite der positiven, der andere auf der Seite der negativen Ordinaten, letzterer, nachdem er die x-Axe in dem Punkte geschnitten hat, dessen Abscisse gleich 1 ist.

Fig. 66.



Das Verhältnis $\frac{y}{x}$ hat die Null zur Grenze für $x = 0$, und wenn x einen sehr kleinen positiven Wert hat, sind die beiden entsprechenden Werte von y auch positiv. Die beiden Zweige haben also im Punkte O eine gemeinsame Tangente, und liegen nahe bei diesem Punkte auf einer Seite derselben. Der Koordinatenursprung ist also ein Rückkehrpunkt zweiter Art. Zu diesem Ergebnis gelangt man auch mittels der Werte von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

Es ist

$$\frac{dy}{dx} = 2x \pm \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = 2 \pm \frac{15}{4} x^{\frac{1}{2}}.$$

Für $x = 0$ wird

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} > 0;$$

der Punkt O ist also ein Rückkehrpunkt zweiter Art.

Isolierte Punkte.

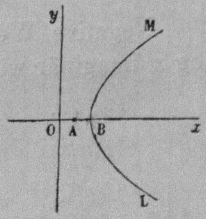
315. Ein Punkt, dessen Koordinaten der Gleichung einer Kurve genügen, ohne dass ein Zweig dieser Kurve durch ihn geht, heisst ein *isolierter* oder *konjugierter Punkt.*

Es sei die Gleichung gegeben

$$y = \pm (x - a) \sqrt{x - b},$$

und zunächst werde $a < b$ angenommen. Für $x = b$ wird $y = 0$, wodurch ein auf der Abscissenaxe gelegener Punkt B bestimmt wird.

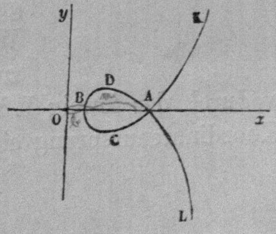
Fig. 67.



Wächst x von b bis $+\infty$, so wächst y von 0 bis $\pm\infty$, und man erhält einen Zweig wie MBL. Für $x < b$ ist die Ordinate imaginär, ausgenommen für $x = a$, denn für diesen Wert von x wird $y = 0$. Also der Punkt A ($x = a$, $y = 0$) ist ein isolierter Punkt.

Ist $a > b$, so hat die Kurve keinen isolierten Punkt, weil beide Werte von y reell sind, wenn x zwischen b und a liegt. Für $x = a$ werden beide Werte von y Null. Von $x = a$ bis $x = \infty$ wächst y bis ins Unendliche. In diesem Falle gehen die beiden Zweige BCK, BDL durch den Punkt A; derselbe ist also ein Doppelpunkt.

Fig. 68.



Endpunkte.

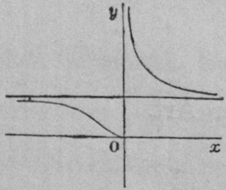
316. Ein Punkt, wo der einzige Zweig einer Kurve plötzlich aufhört, heisst ein *Endpunkt.*

Wir betrachten erstens die durch die Gleichung

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

dargestellte Kurve.

Fig. 69.



Für $x = 0$ wird $y \infty$; wächst x bis $+\infty$, so nimmt y von $+\infty$ bis $+1$ ab; demnach liegt ein Kurvenzweig asymptotisch zur y-Axe und zu der Geraden, deren Gleichung $y = 1$ ist.

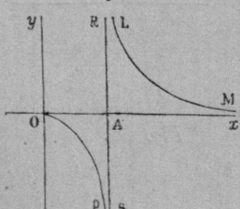
Nimmt man negative Werte von x an, so wird $y = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$, und für $x = 0$ wird nun $y = 0$; die Kurve geht also durch den Koordinatenursprung. Die Ordinate nimmt ferner mit dem absoluten Werte von x zu bis zu dem Werte $y = 1$. Es ist also ein zweiter Kurvenzweig vorhanden, der asymptotisch zu der Geraden $y = +1$ liegt und plötzlich in dem Koordinatenursprunge aufhört, indem er von der Seite der negativen x herkommt. Der Koordinatenursprung ist also ein Endpunkt.

317. Ferner sei die Kurve gegeben

$$y = \frac{1}{\log x}.$$

Negative Werte dürfen x nicht beigelegt werden, da für sie log x imaginär würde. Erhält x sehr kleine positive Werte, so wird

Fig. 70.



y sehr klein und negativ, wächst seinem absoluten Betrage nach mit x bis zu dem Werte $x = 1$ und wird $-\infty$ für $x = 1$. Ein Kurvenzweig geht demnach vom Koordinatenursprunge aus und hat auf der Seite der negativen y die Gerade $x = 1$ zur Asymptote. Wächst x von 1 bis ∞, so wird y positiv, ist zuerst sehr gross und nimmt bis zu Null ab, wodurch der Zweig LM gegeben ist. In diesem Beispiele ist der Koordinatenursprung ein Endpunkt.

Eckpunkt.

318. Wir betrachten die Kurve

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

Für x = 0 ist y = 0; der Koordinatenursprung ist also ein Kurvenpunkt. Setzt man nun in dem Ausdrucke

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

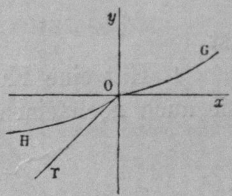
x = 0, so erhält man $\lim \frac{y}{x} = 0$; die Axe O x ist also Tangente des Zweiges O G im Punkte O.

Setzt man ferner x = — z und somit

$\frac{y}{x} = \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{z}}}$, so wird für x = — z = 0

$$\lim \frac{y}{x} = 1.$$

Fig. 71.



Der auf der Seite der negativen Abscissen liegende Zweig O H hat also die Halbierungslinie O T des Axenwinkels zur Tangente. Ein derartiger Punkt O, worin zwei Kurvenzweige endigen, die in diesem Punkte verschiedene Tangenten haben, heisst ein *Eckpunkt.*

319. Die Bestimmung der singulären Punkte erfordert eine sorgfältige Untersuchung der Form der Kurve in der Nähe desjenigen Punktes, wofür der analytische Ausdruck von $\frac{dy}{dx}$ eine der in dieser Lektion angeführten Eigentümlichkeiten zeigt. Denn es kann vorkommen, dass $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in der Nähe dieses Punktes beständig imaginär bleibt, während $\frac{dy}{dx}$ für ihn reell ist. Doch würde die Erörterung dieses Verhaltens, im Falle dass y eine implicite Funktion von x ist, hier zu weit führen.

Übungen.

1. Man soll die Wendepunkte einer Konchoide bestimmen. (Man erhält die Konchoide, indem man aus einem festen Punkte Gerade nach einer festliegenden Geraden zieht und dieselben um eine konstante Grösse verlängert).

Auflösung. — Man wählt als y-Axe die feste Gerade und als x-Axe das durch den festen Punkt gezogene Lot. Ist a der Abstand des festen Punktes von der Geraden und b die Grösse, um die man die nach der Geraden gezogenen Leitstrahlen verlängert, so

sind die Abscissen der Wendepunkte durch die Gleichung gegeben

$$x^3 + 3\,a\,x^2 - 2\,a\,b^2 = 0.$$

2. Die Kurve $y^x = x^y$ ist zu konstruieren und zu erörtern.

3. Zu beweisen, dass, von den Wendepunkten abgesehen, in jedem singulären Punkte einer Kurve

$$f(x, y) = 0$$

$$\frac{df}{dx} = 0, \frac{df}{dy} = 0$$

ist.

4. Hat eine Kurve dritten Grades zwei Wendepunkte, so hat sie auch noch einen dritten, der mit jenen in gerader Linie liegt.

Integralrechnung.

Siebenundzwanzigste Lektion.

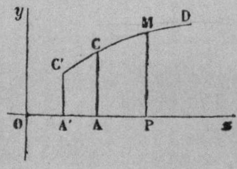
Regeln für die Integration der Funktionen.

Definitionen und Bezeichnungen. — Integration einer mit einer Konstanten multiplizierten Funktion. — Unmittelbare Integration einiger einfachen Differenziale. — Integration einer Summe. — Partielle Integration. — Integration durch Substitution.

Definitionen und Bezeichnungen.

320. Hat man eine Funktion einer einzigen Veränderlichen, so kann man sie immer als die Ableitung einer anderen unbekannten Funktion auffassen und diese letztere aufsuchen, deren Differenzial die gegebene Funktion multipliziert mit dem Differential der unabhängigen Veränderlichen sein wird.

Fig. 72.



Ist f (x) die gegebene Funktion, so giebt es immer eine andere Funktion, deren Differenzial f (x) d x ist. Denn konstruieren wir die Kurve C M D, die, auf rechtwinklige Koordinatenaxen bezogen, die Gleichung

$$y = f(x)$$

habe, so ist die Fläche, die von dieser Kurve, einer beliebigen festen Ordinate C A, der veränderlichen Abscisse x und der zu letzterer gehörenden Ordinate M P begrenzt wird, eine bestimmte Funktion von x. Das Differential dieser Fläche ist nun aber y d x oder f(x) d x; diese Fläche ist folglich eine Funktion, deren Differenzial f (x) d x und deren Ableitung f (x) ist.

321. Eine Funktion, deren Differenzial f (x) d x ist, nennt man das *Integral* von f (x) d x und bezeichnet sie durch $\int f(x)\,dx$. Die Operation mittels der man von dem Differenzial einer Funktion zu der letzteren gelangt, heisst *Integration*. Die Integration ist das Umgekehrte der Differentiation, dergestalt, dass die beiden Zeichen d und $\int$ sich gegenseitig aufheben.

Man hat also nach der Definition

$$d \int f(x)\, dx = f(x)\, dx, \int d\, \varphi(x) = \varphi(x).$$

322. Das Integral eines gegebenen Differenzials $f(x)\, dx$ kann unendlich viele Werte haben; denn ist $\varphi(x)$ eine Funktion, deren Differenzial $f(x)\, dx$ ist, und man addiert zu dieser Funktion eine willkürliche Konstante C, so hat der Ausdruck $\varphi(x) + C$ dasselbe Differenzial wie $\varphi(x)$. Aber einen anderen derartigen Ausdruck giebt es nicht; denn zwei Funktionen, die dasselbe Differenzial haben, können sich nur durch eine Konstante voneinander unterscheiden.

Das allgemeine Integral von $f(x)\, dx$ ist also

$$\varphi(x) + C,$$

wenn C eine willkürliche Konstante bezeichnet. Die Figur lässt die Bedeutung dieser willkürlichen Konstante erkennen; denn wählt man C′A′ statt CA zur festen Ordinate, so erhält man die Fläche C′A′MP, die um das Stück von konstanter Grösse C′A′AC grösser ist als die Fläche CAMP.

Integration eines mit einem konstanten Faktor multiplizierten Differenzials.

323. Bekanntlich kann ein konstanter Faktor a ausserhalb des Differentiationszeichens gesetzt werden; für die Integration giebt es nun eine analoge Regel.

Denn man hat

$$d\, a u = a\, d u;$$

nun ist

$$\int d\, a u = a u, \quad a \int d u = a u,$$

und folglich

$$\int d\, a u = a \int d u \text{ oder } \int a\, d u = a \int d u,$$

und auch, wenn man $du = f(x)\, dx$ setzt,

$$\int a\, f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx.$$

Unmittelbare Integration einiger einfacher Funktionen.

324. Die Differentiation der einfachen Funktionen x^m, a^x u. s. w. ergiebt sofort eine Anzahl von Integralen, die wir hier zusammenstellen wollen.

$$d\, x^{n+1} = (n+1)\, x^n\, dx, \quad \int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$d\, e^x = e^x\, dx, \quad \int e^x\, dx = e^x + C,$$

$$d\, a^x = a^x \, l\, a\, d\, x, \qquad \int a^x \, d\, x = \frac{a^x}{l\, a} + C,$$

$$d\, l\, x = \frac{d\, x}{x}, \qquad \int \frac{d\, x}{x} = l\, x + C,$$

$$d \sin x = \cos x\, d\, x, \qquad \int \cos x\, d\, x = \sin x + C,$$

$$d \cos x = - \sin x\, d\, x, \qquad \int \sin x\, d\, x = - \cos x + C,$$

$$d \operatorname{tang} x = \frac{d\, x}{\cos^2 x}, \qquad \int \frac{d\, x}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C,$$

$$d \cot x = \frac{-d\, x}{\sin^2 x}, \qquad \int \frac{d\, x}{\sin^2 x} = - \cot x + C.$$

Ist $x < \frac{\pi}{2}$, so ist

$$d \operatorname{arc} \sin x = \frac{d\, x}{\sqrt{1 - x^2}}, \int \frac{d\, x}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C,$$

$$d \operatorname{arc} \cos x = - \frac{d\, x}{\sqrt{1 - x^2}}, \int \frac{d\, x}{\sqrt{1 - x^2}} = - \operatorname{arc} \cos x + C.$$

Man erhält demnach für das Integral $\int \frac{d\, x}{\sqrt{1 - x^2}}$ zwei anscheinend von einander verschiedene Werte; da aber

$$\operatorname{arc} \cos x + \operatorname{arc} \sin x = \frac{\pi}{2}$$

ist, so unterscheiden sich beide offenbar nur durch eine Konstante.

$$d \operatorname{arc} \operatorname{tang} x = \frac{d\, x}{1 + x^2}, \quad \int \frac{d\, x}{1 + x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tang} x + C.$$

325. In allen vorstehenden Formeln kann x als unabhängige Veränderliche oder auch als eine beliebige Funktion der unabhängigen Veränderlichen betrachtet werden. Setzt man z. B. in der Formel

$$\int x^n \, d\, x = \frac{x^{n+1}}{n + 1} + C \tag{1}$$

$\varphi(x)$ an die Stelle von x, so wird

$$\int [\varphi(x)]^n \, d\, \varphi(x) = \frac{[\varphi(x)]^{n+1}}{n + 1} + C.$$

326. Die Formel (1) hat keinen Sinn, wenn $n = -1$ ist; denn man erhält dann

$$\int \frac{d\, x}{x} = \frac{1}{0} + C.$$

Dieses kommt daher, dass $\int \frac{dx}{x}$ gleich der transcendenten Grösse $l\,x$ ist, die sich durch einen algebraischen Ausdruck nicht darstellen lässt; indessen kann man durch einen Kunstgriff den Wert von $\int \frac{dx}{x}$ aus der Formel (1) erhalten.

Wir ziehen dazu von der rechten Seite die konstante Grösse $\frac{1}{n+1}$ ab, wodurch das Differenzial nicht geändert wird, und erhalten so

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}-1}{n+1} + C.$$

Macht man nun $n = -1$, so wird der Quotient $\frac{x^{n+1}-1}{n+1} = \frac{0}{0}$, und um nach bekannter Methode seinen wahren Wert zu bestimmen, müssen wir im Zähler und Nenner die Ableitung nach n nehmen, und im Quotienten beider Ableitungen, d. h. in $\frac{x^{n+1}\,l\,x}{1}$, $n = -1$ setzen, wodurch er gleich $l\,x$ wird. Man hat also

$$\int \frac{dx}{x} = l\,x + C.$$

Integration einer Summe.

327. In der Differenzialrechnung haben wir Regeln für die Differenzierung einer Summe, eines Produktes aus mehreren Funktionen und einer Funktion von Funktionen aufgestellt; hieraus lassen sich analoge Regeln für die Integration ableiten.

Wir hatten

$$d(u+v-z) = du + dv - dz;$$

hieraus folgt, wenn wir beiderseits integrieren,

$$\int d(u+v-z) = \int du + \int dv - \int dz,$$

oder

$$\int [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx - \int \psi(x)\,dx.$$

Also: *das Integral einer Summe von Funktionen ist die Summe der Integrale der Funktionen, aus denen sie zusammengesetzt ist.*

Beispiele.

$$\int (A x^m + B x^n + C x^p + \ldots) = \frac{A x^{m+1}}{m+1} + \frac{B x^{n+1}}{n+1} + \frac{C x^{p+1}}{p+1} + \ldots,$$

$$\int (4x^3 - 5x^2 - 3x + 8)\,dx = x^4 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8x + C,$$

$$\int \frac{(x^3 - 4x^2 + 5)\,dx}{x} = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5\,l\,x + C.$$

Partielle Integration.

328. Bezeichnen u und v zwei Funktionen derselben Veränderlichen, so ist

$$d\,u\,v = u\,d\,v + v\,d\,u,$$

und man erhält demnach durch Integration

$$u\,v = \int u\,d\,v + \int v\,d\,u,$$

oder auch

$$\int u\,d\,v = u\,v - \int v\,d\,u.$$

Durch diese häufig angewendete Formel wird also die Bestimmung des Integrals $\int u\,d\,v$ auf die des Integrals $\int v\,d\,u$ zurückgeführt. Man nennt sie *partielle Integration;* jedoch wäre die Bezeichnung *Integration nach Faktoren* vielleicht geeigneter, da sie auf der Zerlegung des zu integrierenden Differenzials in zwei Faktoren beruht.

Beispiele.

1. $$\int x^2 \cos x\,d\,x.$$

Man setze

$$\int x^2 \cos x\,d\,x = \int x^2\,d \sin x = x^2 \sin x - 2\int x \sin x\,d\,x,$$

$$\int x \sin x\,d\,x = -\int x\,d \cos x = -x\cos x + \int \cos x\,d\,x$$
$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

Setzt man diesen Wert in die erste Gleichung ein, so erhält man also

$$\int x^2 \cos x\,d\,x = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

2. $$\int x^m e^x\,d\,x.$$

Es ist

$$\int x^m e^x\,d\,x = \int x^m\,d e^x = x^m e^x - m\int x^{m-1} e^x\,d\,x.$$

Die Integration von $x^m e^x\,d\,x$ ist also auf die von $x^{m-1} e^x\,d\,x$ zurückgeführt, letztere kann dann in gleicher Weise auf die von $x^{m-2} e^x\,d\,x$ zurückgeführt werden u. s. w.; so dass man, wenn m eine positive ganze Zahl ist, schliesslich das Integral von $e^x\,d\,x$ zu

bestimmen hat, das $e^x + C$ ist, und eine Reihe von Substitutionen das gesuchte Integral ergiebt. Für $m = 2$ findet man

$$\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + C.$$

3. $$\int l x dx,$$

wenn lx den natürlichen Logarithmus von x bezeichnet. Man erhält

$$\int l x dx = x l x - \int x \frac{dx}{x} = x(lx - 1) + C.$$

Integration durch Substitution.

329. Das Integral einer Differenzialfunktion $f(x) dx$, die nicht unmittelbar integrabel ist, findet man bisweilen durch Einführung einer neuen Veränderlichen. Dieses Verfahren bezeichnet man als Integration durch *Substitution.*

Ist z. B. $x = \varphi(t)$, so hat man

$$dx = \varphi'(t) dt \text{ und } \int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Beispiele.

1. $$\int (ax + b)^m dx.$$

Man setze

$$ax + b = t, \text{ und folglich } dx = \frac{dt}{a};$$

so wird

$$\int (ax + b)^m dx = \frac{1}{a} \int t^m dt = \frac{1}{a} \frac{t^{m+1}}{m+1} + C,$$

oder

$$\int (ax + b)^m dx = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{m+1}}{m+1} + C.$$

2. Allgemeiner ist folgende Formel. Wird das Integral

$$\int f(ax + b) dx$$

gesucht, so setze man

$$ax + b = t, \text{ und folglich } dx = \frac{dt}{a},$$

wodurch man auf das Integral

$$\frac{1}{a} \int f(t) dt$$

geführt wird.

3. $$\int \frac{5x^3 dx}{3x^4 + 7}.$$

Um eine neue Veränderliche t einzuführen, beachte man, dass der Zähler des Differenzials von einem konstanten Faktor abgesehen, gleich dem Differenzial des Nenners ist. Setzen wir nun

$$3x^4 + 7 = t, \text{ und folglich } x^3\,dx = \frac{1}{12}\,dt,$$

so wird

$$\int \frac{5x^3\,dx}{3x^4+7} = \int \frac{5\,dt}{12\,t} = \frac{5}{12}\,l\,t + C,$$

oder auch

$$\int \frac{5x^3\,dx}{3x^4+7} = \frac{5}{12}\,l\,(3x^4+7) + C.$$

4. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Setzen wir $\sqrt{a^2+x^2} = t$, und folglich $a^2 + x^2 = t^2$, $x\,dx = t\,dt$, so wird

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int dt = t + C = \sqrt{a^2+x^2} + C.$$

5. Dasselbe Verfahren führt zu dem häufig benutzten Integrale

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q},$$

wenn die beiden Faktoren vom ersten Grade, in die $x^2 + px + q$ zu zerlegen ist, imaginär sind, d. h. wenn $q - \frac{p^2}{4} > 0$ ist. Es ist identisch

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Setzt man nun

$$x + \frac{p}{2} = t\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}, \text{ und folglich } dx = dt\sqrt{q - \frac{p^2}{4}},$$

so erhält das gesuchte Integral die Form

$$\frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \text{ arc tang } t + C,$$

oder wenn man t durch den Ausdruck, den es als Funktion von x betrachtet hat, ersetzt

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \text{ arc tang } \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.$$

Dieses Resultat kann auf eine andere Form gebracht werden. Es seien $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ und $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ die imaginären Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + px + q = 0;$$

so hat man

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \ \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}};$$

das vorliegende Integral kann demnach geschrieben werden

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\beta} \text{ arc tang } \frac{x - \alpha}{\beta} + C.$$

6. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}}.$$

Es ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{bx^2}{a}}}:$$

setzen wir nun

$$\frac{bx^2}{a} = t^2, \text{ und folglich } x = t\sqrt{\frac{a}{b}}, \ dx = \sqrt{\frac{a}{b}}\, dt;$$

so wird

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\, dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{ arc sin } t + C,$$

oder schliesslich

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{ arc sin } \left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C.$$

Achtundzwanzigste Lektion.

Integration rationaler Funktionen.

Ungleiche Wurzeln. — Ungleiche imaginäre Wurzeln. — Gleiche Wurzeln. — Gleiche imaginäre Wurzeln.

Integration rationaler Brüche.

330. Es sei der Bruch

$$\frac{F(x)\,dx}{f(x)}$$

zu integrieren, wenn F (x) und f (x) ganze algebraische Funktionen von x sind.

Wenn der Grad von F (x) nicht niedriger als der von f (x) ist, kann man F (x) durch f (x) dividieren, bis man zu einem Reste $\varphi(x)$ gelangt, dessen Grad niedriger ist als der von f (x): bezeichnen wir den Quotienten mit Q, so hat man

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q + \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

und folglich

$$\int \frac{F(x)\,dx}{f(x)} = \int Q\,dx + \int \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx.$$

Da man $\int Q\,dx$ bestimmen kann, ist somit die Aufgabe darauf zurückgeführt, den rationalen Bruch $\frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)}$ zu integrieren, worin der Grad von $\varphi(x)$ niedriger ist als der von f (x).

Ungleiche Wurzeln.

331. Wir suchen also

$$\int \frac{\varphi(x)\,dx}{f(x)}.$$

Es sei m der Grad der Gleichung

$$f(x) = 0,$$

deren Wurzeln wir durch a, b, c, . . . , k bezeichnen wollen. Zuerst werde angenommen, dass diese m reellen oder imaginären Wurzeln alle von einander verschieden sind. Wir suchen nun womöglich m Konstanten A, B, C, . . , K von der Art zu bestimmen, dass die Gleichung

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{K}{x-k} \tag{1}$$

identisch erfüllt wird. Dazu ist notwendig und hinreichend, dass für jeden Wert von x

$$\varphi(x) = A\frac{f(x)}{x-a} + B\frac{f(x)}{x-b} + \ldots + K\frac{f(x)}{x-k} \tag{2}$$

ist. Die Quotienten $\frac{f(x)}{x-a}, \frac{f(x)}{x-b}, \ldots$ sind alle ganz, und die Anzahl der Unbekannten A, B, C, . . . ist gleich m; man könnte sie also bestimmen, indem man die Koëfficienten derselben Potenzen von x auf beiden Seiten gleich setzt. Man kann jedoch einen viel einfacheren Weg einschlagen, der überdies zeigt, dass sie weder unendlich noch unbestimmt sind.

Setzen wir in der Gleichung (2) x = a, so werden, da die Wurzeln a, b, c . . . k alle unter einander verschieden sind, die Koëfficienten $\frac{f(x)}{x-b}, \frac{f(x)}{x-c}, \ldots \frac{f(x)}{x-k}$ Null. Ferner wird dann $\frac{f(x)}{x-a}$ gleich $\frac{0}{0}$ sein wahrer Wert ist jedoch nach der bekannten Regel gleich f' (a). Also ist

$$\varphi(a) = A f'(a), \text{ und folglich } A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}.$$

Dieser Wert von A ist nicht unendlich; denn da a eine einfache Wurzel von f (x) ist, so ist f' (a) nicht Null; ferner ist auch A von Null verschieden, wenn man, was immer zulässig ist, annimmt, dass der Bruch $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ irreduzibel ist.

Geben wir also den Konstanten die bestimmten endlichen Werte

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)}, \; B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)}, \ldots K = \frac{\varphi(k)}{f'(k)}, \tag{3}$$

so ist die Gleichung (2) für $x = a$, $x = b$, ... erfüllt. Folglich gilt sie auch identisch für jeden anderen Wert von x. Denn wäre dieses nicht der Fall, so hätte sie m Wurzeln, da sie für die m Werte a, b, c, ... k erfüllt ist, während sie in Bezug auf x höchstens vom Grade $m - 1$ ist, was nicht möglich ist.

332. Man kann auch noch auf zwei anderen Wegen zu dem Werte von $\frac{f(x)}{x - a}$ für $x = a$ gelangen.

1. Es ist (**122**)

$$f(x) = f(a + \overline{x - a}) = f(a) + (x - a) f'(a) + \frac{(x - a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \dots$$

und diese Entwickelung hat, da f(x) ein algebraisches Polynom ist, ein Ende. Da nun $f(a) = 0$, reduziert sie sich auf

$$f(x) = (x - a) f'(a) + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2} (x - a)^2 + \dots,$$

woraus folgt

$$\frac{f(x)}{x - a} = f'(a) + \frac{f''(a)}{1 \cdot} (x - a) + \dots\,.$$

Demnach ist, für $x = a$,

$$\lim \frac{f(x)}{x - a} = f'(a).$$

2. Ist M der Koëfficient der höchsten Potenz von x in f(x), so ist

$$\frac{f(x)}{x - a} = M (x - b)(x - c) \dots (x - k),$$

folglich wird, für $x = a$,

$$\lim \frac{f(x)}{x - a} = M (a - b)(a - c) \dots (a - k) = f'(a).$$

333. Da nun die Transformation (1) ausgeführt ist, erhält man

$$\int \frac{\varphi(x)\, dx}{f(x)} = \int \frac{A\, dx}{x - a} + \int \frac{B\, dx}{x - b} + \dots,$$

und folglich

$$\int \frac{\varphi(x)\, dx}{f(x)} = A\, l(x - a) + B\, l(x - b) + \dots \tag{4}$$

Diese Formel kann man benutzen, wenn die Wurzeln a, b, c ... k alle reell und die Differenzen $x - a$, $x - b$, ... $x - k$ alle positiv

sind. Ist aber z. B. x — a negativ, so muss man, was zulässig ist, A l (x — a) in A l (a — x) ändern; denn es ist

$$d\,l\,(a - x) = -\frac{dx}{a - x} = \frac{dx}{x - a}.$$

A l (x — a) würde imaginär sein (**152**).

Ungleiche imaginäre Wurzeln.

334. Sind von den Wurzeln der Gleichung f (x) = 0 einzelne imaginär, so ist die Transformation (1) dennoch möglich, aber das Glied, das in Formel (4) einer imaginären Wurzel entspricht, würde in imaginärer Form auftreten. Besser ist dann folgendes Verfahren.

Wir betrachten die beiden konjugierten imaginären Wurzeln

$$a = \alpha + \beta \sqrt{-1}, \quad b = \alpha - \beta \sqrt{-1};$$

es ist

$$A = \frac{\varphi(a)}{f'(a)} = \frac{\varphi(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{f'(\alpha + \beta\sqrt{-1})} = G + H\sqrt{-1},$$

wenn G und H zwei reelle rationale Funktionen von α und β sind. Ändern wir $\sqrt{-1}$ in $-\sqrt{-1}$, so erhält man

$$B = \frac{\varphi(b)}{f'(b)} = \frac{\varphi(\alpha - \beta\sqrt{-1})}{f'(\alpha - \beta\sqrt{-1})} = G - H\sqrt{-1}.$$

Also ist

$$\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} = \frac{G + H\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}} + \frac{G - H\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{2\,G\,(x - \alpha) - 2\,H\,\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2},$$

und demnach

$$\int \left(\frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b}\right) dx = \int \frac{2\,G\,(x - \alpha)\,dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} - \int \frac{2\,H\,\beta\,dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

Nun ist

$$\int \frac{2\,G\,(x - \alpha)\,dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} = G\,l\,[(x - \alpha)^2 + \beta^2],$$

$$\int \frac{2\,H\,\beta\,dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} = 2\,H\,\text{arc tang}\left(\frac{x - \alpha}{\beta}\right);$$

folglich ist

$$\int\left(\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B}{x-b}\right)dx = G\,l\,[(x-\alpha)^2+\beta^2] - 2H\,\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)+C.$$

Auf diese Weise gelangt man zu dem Integrale des rationalen Bruches $\frac{\varphi(x)\,dx}{fx}$, wenn alle Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ von einander verschieden sind.

335. Beispiele.

1. $$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{(3-2x)\,dx}{x^2-x-2} = \frac{(3-2x)\,dx}{(x+1)(x-2)}.$$

Wir setzen

$$\frac{3-2x}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2},$$

und substituieren dann in der Gleichung $\frac{\varphi(x)}{f'(x)} = \frac{3-2x}{2x-1}$ für x nacheinander die Werte -1 und $+2$, so wird $A = -\frac{5}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$.

Folglich ist

$$\frac{(3-2x)\,dx}{x^2-x-2} = -\frac{5}{3}\,\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\,\frac{dx}{x-2},$$

und

$$\int\frac{(3-2x)\,dx}{x^2-x-2} = -\frac{5}{3}\,l\,(x+1) - \frac{1}{3}\,l\,(x-2) + C.$$

2. $$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{a^2-x^2}.$$

Setzen wir

$$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a},$$

so wird

$$\frac{\varphi(x)}{f'(x)} = -\frac{1}{2x},\quad A = \frac{-1}{2a},\quad B = \frac{1}{2a},$$

und folglich

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2} = -\frac{1}{2a}\,l\,(x-a) + \frac{1}{2a}\,l\,(x+a) + C,$$

oder

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\,l\left(\frac{x+a}{x-a}\right) + C = \frac{1}{2a}\,l\left(c\,\frac{x+a}{x-a}\right).$$

3. $$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{(3x+7)\,dx}{2x^2-3x+5}.$$

Da die Gleichung $2x^2 - 3x + 5 = 0$ nur imaginäre Wurzeln hat, wollen wir diesen Quotienten unmittelbar integrieren, ohne ihn in einfachere Brüche zu zerlegen.

Die Ableitung von $2x^2 - 3x + 5$ ist $4x - 3$; teilen wir $3x + 7$ durch $4x - 3$, so erhalten wir

$$\frac{3x+7}{4x-3} = \frac{3}{4} + \frac{37}{4(4x-3)},$$

und folglich

$$\frac{3x+7}{2x^2-3x+5} = \frac{\frac{3}{4}(4x-3) + \frac{37}{4}}{2x^2-3x+5}.$$

Also wird

$$\int \frac{(3x+7)\,dx}{2x^2-3x+5} = \frac{3}{4}\int \frac{(4x-3)\,dx}{2x^2-3x+5} + \frac{37}{4}\int \frac{dx}{2x^2-3x+5},$$

oder

$$\int \frac{(3x+7)\,dx}{2x^2-3x+5} = \frac{3}{4}\,l\,(2x^2-3x+5) + \frac{37}{4}\int \frac{dx}{2x^2-3x+5}.$$

Nun ist

$$\frac{37}{4}\int \frac{dx}{2x^2-3x+5} = \frac{37}{8}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}},$$

und dieses Integral ist (**329**, 5) gleich

$$\frac{4}{\sqrt{31}} \text{ arc tang } \frac{4x-3}{\sqrt{31}};$$

also wird schliesslich

$$\int \frac{(3x+7)\,dx}{2x^2-3x+5} = \frac{3}{4}\,l\,(2x^2-3x+5) + \frac{37}{2\sqrt{31}} \text{ arc tang } \frac{4x-3}{\sqrt{31}} + C.$$

4. Allgemeiner ist folgende Entwickelung. Ist $\frac{(Mx+N)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^3}$ der zu integrierende Ausdruck, so bringen wir ihn auf die Form

$$\frac{M}{2}\,\frac{2(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + (M\alpha+N)\,\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Nun ist aber (**329**)

$$\int \frac{2(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = l\,[(x-\alpha)^2+\beta^2],$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta} \text{ arc tang } \frac{x-\alpha}{\beta};$$

also wird

$$\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = \frac{M}{2}\,l[(x-\alpha)^2+\beta^2] + \frac{M\alpha+N}{\beta} \text{ arc tang } \frac{x-\alpha}{\beta} + C.$$

Gleiche Wurzeln.

336. Kommen in dem Nenner von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx$ gleiche Wurzeln vor, d. h. ist

$$f(x) = M\,(x-a)^n\,(x-b)^p\,(x-c)^q \ldots (x-k),$$

so lassen sich Konstanten A, B, C, ... K, die der identischen Gleichung

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots$$

genügen, nicht bestimmen. Denn bilden wir aus den Gliedern der rechten Seite einen einzigen Bruch, so enthält dessen Nenner $x-a$ nur in der ersten Potenz, während es in $f(x)$ in der n^{ten} Potenz enthalten, und überdies der Bruch $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ irreduzibel angenommen ist. Um in diesem Falle eine geeignete Zerlegung zu finden, setzen wir zunächst

$$f(x) = (x-a)^n;$$

dann ist nach dem Taylorschen Satze (**122**)

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n} = \frac{\varphi(a)}{(x-a)^n} + \frac{\varphi'(a)}{(x-a)^{n-1}} + \frac{1}{1.2}\,\frac{\varphi''(a)}{(x-a)^{n-2}} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\,\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{x-a}.$$

Weiter geht die Entwickelung nicht; denn ist $f(x) = (x-a)^n$, so ist $\varphi(x)$ höchstens vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade. Demnach ist dann $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ in n Brüche zu zerlegen, deren jeder als Zähler eine Konstante und als Nenner eine Potenz von $x-a$ hat.

Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, Brüche von der Form $\frac{dx}{(x-a)^h}$ zu integrieren. Da dieses Differential auf die Form $\frac{d(x-a)}{(x-a)^h}$ gebracht werden kann, so ist sein Integral, für $h > 1$, $-\frac{1}{(h-1)(x-a)^{h-1}}$, und für $h = 1$, $l\,(x-a)$.

337. Wir wollen nun eine der vorstehenden analoge Zerlegung für den allgemeinen Fall suchen, wenn

$$f(x) = M(x-a)^n (x-b)^p (x-c)^q \ldots (x-k) = (x-a)^n f_1(x).$$

Es seien $A, A_1, A_2, A_3 \ldots, A_{n-1}$ n Koëfficienten, die der identischen Gleichung

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{\psi(x)}{f_1(x)}$$

genügen, worin $\psi(x)$ eine rationale ganze Funktion von x ist. Multipliziert man diese Gleichung mit $f(x)$ und bringt alle Glieder, die $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ enthalten, auf die linke Seite, so wird für jeden Wert von x

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x) - A\frac{f(x)}{(x-a)^n} - A_1\frac{f(x)}{(x-a)^{n-1}} - A_2\frac{f(x)}{(x-a)^{n-2}} - \ldots \\ - A_{n-1}\frac{f(x)}{x-a} = (x-a)^n \psi(x).\end{aligned}\right\} (1)$$

Entwickeln wir nun $\varphi(x)$ nach Potenzen von $x-a$, so wird

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)(x-a) + \frac{\varphi''(a)}{1.2}\cdot(x-a)^2 + \ldots.$$

Für $f(x)$ kann man eine analoge Entwickelung aufstellen; da aber a eine vielfache Wurzel vom n^{ten} Grade ist, so sind $f(a)$, $f'(a), \ldots f^{n-1}(a)$ Null, und man hat einfach

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}}{1.2.3\ldots(n+1)}(x-a)^{n+1} + \ldots$$

Substituieren wir diese Werte von $\varphi(x)$ und $f(x)$ in die Gleichung (1) und ordnen nach Potenzen von $(x-a)$, so erhalten wir auf der linken Seite

$$\varphi(a) - A\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}$$
$$+\left[\varphi'(a) - A\frac{f^{(n+1)}(a)}{1.2\ldots(n+1)} - A_1\frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n}\right](x-a)$$
$$+\left[\frac{\varphi''(a)}{1.2} - A\frac{f^{(n+2)}(a)}{1.2..(n+2)} - A_1\frac{f^{(n+1)}(a)}{1.2..(n+1)} - A_2\frac{f^{(n)}(a)}{1.2..n}\right](x-a)^2$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\left[\frac{\varphi^{(n)}(a)}{1.2..n} - A\frac{f^{(2n)}(a)}{1.2\ldots 2n} - A_1\frac{f^{(2n-1)}(a)}{1.2\ldots(2n+1)}\ldots\right](x-a)^n$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Da nun die rechte Seite durch $(x-a)^n$ teilbar ist, so muss es auch die linke sein; folglich müssen die Koëfficienten aller Potenzen von $x-a$ bis einschliesslich zu dem Koëfficienten von $(x-a)^{n-1}$ Null sein.

Setzen wir diese Koëfficienten gleich Null, so erhalten wir n Gleichungen vom ersten Grade, die für $A, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ ein einziges System von bestimmten endlichen Werten geben; denn die Nenner der unbekannten Grössen sind die verschiedenen Potenzen von $f^{(n)}(a)$ und nach der Voraussetzung ist $f^{(n)}(a)$ nicht Null.

338. Nachdem so $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ auf die Form

$$\frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a} + \frac{\psi(x)}{f_1(x)}$$

gebracht ist, bringen wir ebenso $\frac{\psi(x)}{f_1(x)}$ auf die Form

$$\frac{B}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \ldots + \frac{B_{p-1}}{x-b} + \frac{\chi(x)}{f_2(x)},$$

worin $f_2(x)$ den Quotienten der Division von $f_1(x)$ durch $(x-b)^p$ bezeichnet.

Indem wir in gleicher Weise fortfahren, erhalten wir schliesslich die Entwickelung

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{A_1}{(x-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{x-a}$$
$$+ \frac{B}{(x-b)^p} + \frac{B_1}{(x-b)^{p-1}} + \ldots + \frac{B_{p-1}}{x-b}$$
$$+ \frac{C}{(x-c)^q} + \frac{C_1}{(x-c)^{q-1}} + \ldots + \frac{C_{q-1}}{x-c}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{K}{x-k},$$

und dieser Ausdruck kann nach der Multiplikation mit d x sehr leicht integriert werden.

Die vorstehende Zerlegung ist nur auf eine Weise auszuführen; denn könnten die Konstanten A_1, $A_2 \ldots A_{n-1}$ z. B. in Bezug auf die Wurzel a mehrere Werte annehmen, so müsste man sie finden, indem man die Zerlegung mit dieser Wurzel beginnt. Aber für jede dieser Konstanten ist nur ein einziger Wert gefunden worden; folglich kann der Quotient $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ nur auf eine Weise in einfache Brüche der betrachteten Form zerlegt werden.

Gleiche imaginäre Wurzeln.

339. Sind einige der gleichen Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ imaginär, so enthält die Entwickelung von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ imaginäre Grössen, die man durch eine geeignete Anordnung der auf die konjugierten Wurzeln bezüglichen Ausdrücke beseitigen kann; einfacher jedoch ist folgendes Verfahren.

Sind $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$ zwei konjugierte Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ und n ihre Potenz, so setzen wir

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{Ax + B}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n} + \frac{A_1 x + B_1}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{n-1}} + \frac{A_2 x + B_2}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{n-2}} + \ldots$$
$$+ \frac{A_{n-1} x + B_{n-1}}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + \frac{\psi(x)}{f_1(x)}.$$

Hierin sind A, B, A_1, B_1, u. s. w. noch zu bestimmende Konstanten, ferner bezeichnet $\psi(x)$ eine rationale ganze Funktion von x, und $f_1(x)$ den Quotienten

$$\frac{f(x)}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n}.$$

Dann gilt identisch die Gleichung

$$\varphi(x) - (Ax + B) f_1(x) - (A_1 x + B_1) [(x-\alpha)^2 + \beta^2] f_1(x)$$
$$- (A_2 x + B_2) [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^2 f_1(x)$$
$$\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$
$$- (A_{n-1} x + B_{n-1}) [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^{n-1} f_1(x)$$
$$= [(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n \psi(x).$$

Die Konstanten A, B, A_1, B_1 u. s. w. sind demnach so zu wählen, dass die linke Seite dieser Gleichung durch $[x-\alpha)^2 + \beta^2]^n$ teilbar wird, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass für

$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ die linke Seite und ebenso ihre $n-1$ ersten Ableitungen Null werden. Man erhält so n Gleichungen, von denen jede in zwei zerfällt, da der reelle und der imaginäre Teil jeder Gleichung gesondert gleich Null zu setzen sind.

In der ersten Gleichung enthalten alle Glieder vom zweiten an $(x-\alpha)^2 + \beta^2$ als Faktor und werden demnach für $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ Null. Diese Gleichung enthält also nur A und B, und da sie in zwei zerfällt, kann man A und B bestimmen.

Die zweite Gleichung, die sich ergiebt, indem man von beiden Seiten der ersten die Ableitungen nimmt, enthält, wenn $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$ gesetzt wird, nur A, B, A_1, B_1, und da A und B bereits bekannt sind, und auch diese Gleichung in zwei zerfällt, so sind aus ihr A_1 und B_1 zu bestimmen. In gleicher Weise erhält man die anderen Konstanten.

Nachdem so die Konstanten bestimmt sind, ist der Quotient $\frac{\psi(x)}{f_1(x)}$ in einzelne Glieder zu zerlegen, deren, nach allem Vorstehenden bekannte, Form von der Natur der binomischen Faktoren von $f_1(x)$ abhängt.

340. Im Fall gleiche imaginäre Wurzeln vorhanden sind, hat man also Differenziale von der Form

$$\frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$$

zu integrieren, worin n eine ganze positive Zahl bezeichnet. Nun ist identisch

$$\int\frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} = \int\frac{A(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \int\frac{(A\alpha+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

Setzt man

$$(x-\alpha)^2+\beta^2 = t, \text{ und folglich } 2(x-\alpha)\,dx = dt;$$

so wird bis auf eine Konstante, für $n > 1$,

$$\int\frac{A(x-\alpha)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} = \int\frac{A\,dt}{2t^n} = -\frac{A}{2(n-1)t^{n-1}}, = -\frac{A}{2(n-1)[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}}$$

und für $n = 1$

$$\int\frac{A(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A}{2}\,l\cdot[(x-\alpha)^2+\beta^2].$$

Also bleibt noch

$$\int\frac{(A\alpha+B)\,dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}$$

zu bestimmen. Dazu setzen wir $x - \alpha = \beta z$, und folglich $dx = \beta dz$, so wird

$$\int \frac{(A\alpha + B)\, dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n} = \frac{A\alpha + B}{\beta^{2n-1}} \int \frac{dz}{(1+z^2)^n};$$

wir haben demnach nun

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$$

zu bestimmen.

341. Es ist identisch

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}} - \int \frac{z^2\, dz}{(1+z^2)^n}; \qquad (1)$$

ferner

$$\int \frac{z^2\, dz}{(1+z^2)^n} = \frac{1}{2} \int z\, \frac{2z\, dz}{(1+z^2)^n},$$

und

$$\frac{2z\, dz}{(1+z^2)^n} = d\left[- \frac{1}{(n-1)\,(1+z^2)^{n-1}}\right]:$$

wir erhalten demnach durch partielle Integration

$$\int \frac{z^2\, dz}{(1+z^2)^n} = - \frac{z}{(2n-2)\,(1+z^2)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}},$$

und durch Einsetzen dieses Wertes in (1)

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \frac{z}{(2n-2)\,(1+z^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}.$$

Die Bestimmung von $\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$ ist somit auf die von $\int \frac{dz}{(1+z^2)^{n-1}}$ zurückgeführt, u. s. f., und da n eine ganze positive Zahl ist, gelangt man schliesslich zu $\int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tang } z$.

Die Integration von $\frac{dz}{(1+z^2)^n}$ und demnach auch die von $\frac{(A\alpha + B)\, dx}{[(x-\alpha)^2 + \beta^2]^n}$ ist also ausgeführt.

342. Auch in folgender Weise kann $\int \frac{dz}{(1+z^2)^n}$ erhalten werden. Setzen wir

$$t = \text{arc tang } z,$$

so wird

$$dt = \frac{dz}{1+z^2}, \quad \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \frac{dt}{(1+z^2)^{n-1}}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{1+z^2} = \cos^2 t, \text{ und folglich } \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \cos^{2n-2} t \, dt,$$

und

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \int \cos^{2n-2} t \, dt.$$

Zu diesem Integrale gelangt man auf verschiedenen Wegen: einer der einfachsten ist, $\cos^{2n-2} t$ nach den cosinus der Vielfachen von t [**146**, (1) und (2)] zu entwickeln. Man erhält so eine begrenzte Entwickelung, von der jedes einzelne Glied nach der Multiplikation mit dt leicht zu integrieren ist.

Neunundzwanzigste Lektion.

Integration irrationaler Funktionen.

Funktionen, die nur eingliedrige irrationale Ausdrücke enthalten. — Funktionen, die eine Quadratwurzel enthalten. — Integration binomischer Differenziale. — Integrable Fälle. — Reduktionsformeln.

Funktionen, die nur eingliedrige irrationale Ausdrücke enthalten.

343. Eine Funktion, die nur eingliedrige irrationale Ausdrücke enthält, ist immer integrabel. Es sei z. B. gesucht

$$\int \frac{(1+\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2})\, dx}{1+\sqrt[3]{x}}.$$

Dieses Integral kann man schreiben

$$\int \frac{(1+x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}})\, dx}{1+x^{\frac{1}{3}}}.$$

Setzen wir nun $x = t^6$, und folglich $dx = 6t^5 dt$, so erhalten wir den rationalen Quotienten

$$\frac{(1 + t^3 - t^4)\, 6t^5 dt}{1 + t^2}$$

oder

$$6\,dt\left(-t^7 + t^6 + t^5 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right);$$

das Integral ist folglich gleich

$$-\frac{3}{4}t^8 + \frac{6}{7}t^7 + t^6 - \frac{6}{5}t^5 + 2t^3 - 6t + 6 \operatorname{arc tang} t + C,$$

und man hat nur noch t durch $\sqrt[6]{x}$ zu ersetzen.

344. Auf den vorstehenden Fall ist jede Funktion zurückzuführen, worin unter jeder Wurzel nur ein Binom aus ersten Potenzen steht. So sei z. B. gesucht

$$\int \frac{[x^2 + \sqrt[3]{(ax+b)^2}]\, dx}{x + \sqrt{ax+b}}.$$

Setzt man $ax + b = t^6$, so wird

$$x = \frac{t^6 - b}{a},\quad dx = \frac{6t^5 dt}{a},\quad \sqrt[3]{(ax+b)^2} = t^4;$$

man hat demnach nur den rationalen Bruch

$$\frac{6}{a^2}\,\frac{t^5\,[(t^6-b)^2 + a^2 t^4]\, dt}{t^6 - b + at^3}$$

zu integrieren.

Funktionen, die eine Quadratwurzel enthalten.

345. Wir gehen nun zur Integration solcher Funktionen über, die die Quadratwurzel eines dreigliedrigen Ausdruckes zweiten Grades enthalten, wie $a + bx + x^2$ oder $a + bx - x^2$: auf einen dieser Ausdrücke kann der dreigliedrige Ausdruck immer zurückgeführt werden, wenn man den Koëfficienten von x^2 mit positivem Vorzeichen aus der Wurzel fortschafft.

Die anzuwendende Methode besteht darin, dass man x, $\sqrt{a + bx \pm x^2}$ und dx in rationale Funktionen einer neuen Veränderlichen umformt, so dass die Aufgabe auf die Integration einer rationalen Funktion zurückgeführt wird.

Zunächst werde angenommen, das unter dem Wurzelzeichen stehende x^2 habe das positive Vorzeichen. Man kann

$$\sqrt{a+bx+x^2} = z \pm x$$

setzen. Wählen wir $z - x$ und erheben ins Quadrat, so erhalten wir

$$a + bx = z^2 - 2xz,$$

und folglich

$$x = \frac{z^2 - a}{2z + b}, \tag{1}$$

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z - x = \frac{a + bz + z^2}{b + 2z}, \tag{2}$$

$$dx = \frac{(b + 2z)\, 2z\, dz - (z^2 - a)\, 2\, dz}{(b + 2z)^2} = \frac{(a + bz + z^2)\, 2\, dz}{(b + 2z)^2}. \tag{3}$$

Durch Substitution der in (1), (2) und (3) enthaltenen Ausdrücke in die gegebene Funktion, wird letztere in eine rationale Funktion von z umgeformt, die dann leicht zu integrieren ist.

346. Ist $a > 0$, so kann man auch

$$\sqrt{a + bx + x^2} = \sqrt{a} + xz$$

setzen. Erhebt man ins Quadrat und dividiert beide Seiten durch x, so wird

$$b + x = 2z\sqrt{a} + xz^2;$$

und folglich

$$x = \frac{2z\sqrt{a} - b}{1 - z^2}, \tag{4}$$

$$\sqrt{a + bx + x^2} = \frac{z^2\sqrt{a} - bz + \sqrt{a}}{1 - z^2}, \tag{5}$$

$$dx = \frac{(z^2\sqrt{a} - bz + \sqrt{a})\, 2\, dz}{(1 - z^2)^2}. \tag{6}$$

347. Beispiele.

1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}}.$$

Wir wenden die erste Transformation an und setzen

$$\sqrt{a + bx + x^2} = z - x.$$

Nach den Formeln (2) und (3) erhält man

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \int \frac{dz}{\frac{b}{2} + z} = l\left(\frac{b}{2} + z\right).$$

Setzt man für z seinen Wert $x + \sqrt{a + bx + x^2}$, so wird also

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = l\left(\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + bx + x^2}\right) + C.$$

Für $b = 0$ wird

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + x^2}} = l\left(x + \sqrt{a + x^2}\right) + C.$$

2. $$\int \frac{(gx + h)\,dx}{\sqrt{a + bx + x^2}}.$$

Dieses Integral ist leicht auf das vorhergehende zurückzuführen. Es ist

$$d\sqrt{a + bx + x^2} = \frac{(b + 2x)\,dx}{2\sqrt{a + bx + x^2}} = \frac{\left(\frac{b}{2} + x\right)dx}{\sqrt{a + bx + x^2}};$$

wäre der Zähler der vorliegenden Funktion gleich $\frac{b}{2} + x$, so könnte man sie demnach unmittelbar integrieren. Nun ist

$$\frac{(gx + h)\,dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \frac{g\left(\frac{b}{2} + x\right)dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} + \frac{\left(h - \frac{gb}{2}\right)dx}{\sqrt{a + bx + x^2}},$$

und folglich

$$\int \frac{(gx + h)\,dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \int \frac{g\left(\frac{b}{2} + x\right)dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} + \left(h - \frac{gb}{2}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}}$$

$$= g\sqrt{a + bx + x^2} + \left(h - \frac{gb}{2}\right) l\left(\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + bx + x^2}\right) + C.$$

348. Wir wollen nun die Integration von

$$f\left(x, \sqrt{a + bx - x^2}\right) dx$$

erörtern.

Ist a positiv, so kann zunächst die zweite Transformation angewendet werden. Wir setzen

$\sqrt{a + bx - x^2} = \sqrt{a} + xz$, und folglich $b - x = 2z\sqrt{a} + xz^2$.

Dann wird

$$x = \frac{b - 2z\sqrt{a}}{1 + z^2}, \tag{1}$$

$$\sqrt{a + bx - x^2} = \frac{\sqrt{a} + bz - z^2\sqrt{a}}{1 + z^2}, \tag{2}$$

$$dx = \frac{2(z^2\sqrt{a} - bz - \sqrt{a})\,dz}{(1 + z^2)^2}. \tag{3}$$

349. Es giebt auch noch eine dritte Transformation mittels der

$$f(x, \sqrt{a + bx \pm x^2})\,dx$$

integriert werden kann, wenn beide Wurzeln von $a + bx \pm x^2$ reell sind.

Wir nehmen zunächst an, das unter dem Wurzelzeichen stehende x^2 habe das Vorzeichen $+$. Sind dann α und β die Wurzeln der Gleichung

$$a + bx + x^2 = 0,$$

so ist

$$a + bx + x^2 = (x - \alpha)(x - \beta).$$

Setzen wir

$$\sqrt{a + bx + x^2} = (x - \alpha)z \text{ oder } a + bx + x^2 = (x - \alpha)^2 z^2,$$

so wird

$$(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \alpha)^2 z^2, \text{ oder } x - \beta = (x - \alpha) z^2,$$

und folglich

$$x = \frac{\beta - \alpha z^2}{1 - z^2}, \tag{1}$$

$$\sqrt{a + bx + x^2} = (x - \alpha)z = \left(\frac{\beta - \alpha z^2}{1 - z^2} - \alpha\right)z = \frac{(\beta - \alpha)z}{1 - z^2}, \tag{2}$$

$$dx = \frac{-(1 - z^2)2\alpha z\,dz + (\beta - \alpha z^2)2z\,dz}{(1 - z^2)^2} = \frac{2(\beta - \alpha)z\,dz}{(1 - z^2)^2}. \tag{3}$$

Diese Formeln ändern sich, wenn x^2 das Vorzeichen $-$ hat: dann ist

$$a + bx - x^2 = (x - \alpha)(\beta - x).$$

Setzen wir

$$\sqrt{a + bx - x^2} = (x - \alpha)z,$$

und folglich

$$\beta - x = (x - \alpha)z^2;$$

so wird

$$x = \frac{\beta + \alpha z^2}{1 + z^2}, \tag{4}$$

$$\sqrt{a + bx - x^2} = (x - \alpha) z = \frac{(\beta - \alpha) z}{1 - z^2}, \tag{5}$$

$$dx = \frac{(1 + z^2) 2 \alpha z dz - (\beta + \alpha z^2) 2 z dz}{(1 + z^2)^2} = \frac{2 (\alpha - \beta) z dz}{(1 + z^2)^2}.$$

350. Man kann dieses Verfahren auf

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}}$$

anwenden; einfacher ist es jedoch letzteres auf die Form

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

zu bringen.

Es ist

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = \frac{dx}{\sqrt{a + \frac{b^2}{4} - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}}.$$

Nun sei

$$\frac{b}{2} - x = t \sqrt{a + \frac{b^2}{4}},$$

und folglich

$$dx = -dt \sqrt{a + \frac{b^2}{4}},$$

so wird

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \text{arc cos} \frac{b - 2x}{\sqrt{4a + b^2}} + C.$$

Für $a = 0$ wird

$$\int \frac{dx}{\sqrt{bx - x^2}} = \text{arc cos} \frac{b - 2x}{b} + C.$$

351. Mittels der vorstehenden Methoden kann eine rationale Funktion $f(x, \sqrt{x + a}, \sqrt{x + b})\, dx$ integriert werden, worin die unter dem Wurzelzeichen stehenden von einander verschiedenen Binome vom ersten Grade sind. Denn, setzen wir

$$\sqrt{x + a} = z,$$

und folglich

$$x = z^2 - a, \ \sqrt{x + b} = \sqrt{z^2 - a + b}, \ dx = 2z\, dz;$$

so wird

$f(x, \sqrt{x+a}, \sqrt{x+b})\, dx$ gleich einer Funktion $F(z, \sqrt{z^2-a+b})\, dz$, die nach den in dieser Lektion dargelegten Methoden zu integrieren ist.

Integration binomischer Differenziale. — Integrabilität.

352. Binomisch nennt man die Differenziale von der Form

$$x^m (a + b x^n)^p \, dx.$$

Die Allgemeinheit dieses Ausdruckes wird nicht beschränkt, wenn man m und n als ganze Zahlen annimmt. Hätte man z. B. den Ausdruck $x^{\frac{2}{3}} \left(a + b x^{\frac{1}{2}}\right)^p dx$, so könnte man $x = z^6$ und folglich $dx = 6 z^5 dz$ setzen. Die Aufgabe wäre dann auf die Integration von $6 z^9 (a + b z^3)^p dz$ zurückgeführt, worin die Exponenten von z ganze Zahlen sind.

Ferner kann n positiv angenommen werden; denn, will man $x^m (a + b x^{-n})^p dx$ integrieren, so genügt es, $x = \frac{1}{z}$ zu setzen, um diese Integration anf die von $-z^{-m-2} (a + b z^n)^p dz$ zurückzuführen, worin der Exponent der in den Klammern stehenden Veränderlichen positiv ist.

Was p betrifft, so ist es gebrochen anzunehmmen: denn ist p eine positive ganze Zahl und man entwickelt $(a + b x^n)^p$, so erhält man ein ganzes Polynom, und ist p eine negative ganze Zahl, so erhält man einen rationalen Bruch; in beiden Fällen könnte die Integration nach den früher angegebenen Methoden ausgeführt werden.

353. Um andere Fälle zu bestimmen, in denen das Differential $x^m (a + b x^n)^p$ integrierbar ist, setzen wir

$$a + b x^n = z,$$

und folglich

$$x = \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{nb} \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dz.$$

Das Differential nimmt dann die Gestalt an

$$\frac{1}{nb} z^p \left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} dz,$$

und die Integration ist ausführbar, wenn

$$\frac{m+1}{n} = \text{einer ganzen Zahl ist.} \tag{1}$$

Denn ist $p = \frac{q}{r}$, und setzen wir $z = t^r$, so kommen wir auf eine rationale Funktion zurück; die Integration ist demnach möglich.

354. Ein anderes Merkmal der Integrabilität ergiebt sich, wenn man das binomische Differential in folgender Form schreibt:

$$x^{m+np}(a x^{-n} + b)^p \, dx.$$

Die eben gefundene Bedingung nimmt dann die Form an

$$\frac{m+np+1}{-n} \text{ oder}$$

$$\frac{m+1}{n} + p = \text{einer ganzen Zahl,} \tag{2}$$

und diese Bedingung kann erfüllt werden, wenn die erste nicht erfüllt wird.

Für das Differential $x^4(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}\,dx$ hat man z. B.

$$\frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}, \quad \frac{4+1}{3} + \frac{1}{3} = 2,$$

also wird nur die zweite Bedingung der Integrabilität erfüllt.

Reduktion des Exponenten des ausserhalb der Klammern stehenden x.

355. Da das binomische Differential $x^m(a+bx^n)^p$ im Allgemeinen nicht integrabel ist, muss man es auf andere einfachere Integrale zurückführen, was mittels der partiellen Integration möglich ist. Man hat

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx = \int x^{m-n+1}(a+bx^n)^p x^{n-1}\,dx = \int u\,dv,$$

wenn man

$$u = x^{m-n+1}, \quad v = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}$$

setzt. Dann wird

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

$$= x^{m-n+1}\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}\,dx. \tag{α}$$

Ist m positiv und grösser als n und p negativ, so ist dieses Integral einfacher als das ursprünglich gegebene; denn alsdann ist $p+1$ seinem absoluten Betrage nach kleiner als p. Man kann aber auch eine Formel aufstellen, worin nur der Exponent des ausserhalb der Klammern stehenden **x** abnimmt. Denn es ist identisch

$$x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} = x^{m-n}(a+bx^n)^p(a+bx^n)$$
$$= ax^{m-n}(a+bx^n)^p + bx^m(a+bx^n)^p,$$

und folglich

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx = a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx + b\int x^m(a+bx^n)^p dx.$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung (α) ein, so erhalten wir

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx$$
$$= x^{m-n+1}\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)}a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx$$
$$-\frac{m-n+1}{nb(p+1)}b\int x^m(a+bx^n)^p dx.$$

Bringen wir nun das letzte Glied auf die linke Seite, so wird folglich

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx$$
$$= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(np+m+1)} - \frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx. \quad (A)$$

Die Integration von $x^m(a+bx^n)^p dx$ ist somit auf die Integration von

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx$$

zurückgeführt; letztere kann man auf die von

$$\int x^{m-2n}(a+bx^n)^p dx$$

zurückführen u. s. f. Ist demnach m positiv und grösser als n und bezeichnet i n das grösste Vielfache von n, das kleiner als m ist, so gelangt man nach i Reduktionen zu dem Integrale

$$\int x^{m-in}(a+bx^n)^p dx.$$

Ist nun $m - in = n-1$, so kann diese Integration sofort ausgeführt werden; denn es ist

$$\int x^{n-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} + C.$$

Ist aber $m-in = n-1$, so ist auch $\frac{m+1}{n} = i+1$, und somit ist dann die erste Bedingung der Integrabilität (**353**) erfüllt.

Ist $np + m + 1 = 0$, so nimmt die rechte Seite von (A) die Form $\infty - \infty$ an, und diese Formel hat dann keinen Sinn. Da aber $\frac{m+1}{n} + p$ gleich Null, d. h. gleich einer ganzen Zahl ist, kommt man wieder auf den zweiten Fall der Integrabilität (**354**) zurück, und das Integral ist sofort zu erhalten.

Reduktion des Exponenten des Binoms.

356. Bei der Transformation (A) bezog sich die Reduktion auf den Exponenten des ausserhalb der Klammern stehenden x, während dar Faktor $(a + bx^n)^p$ sich nicht änderte. Man kann nun andrerseits auch den Faktor x^m unverändert lassen und das gesuchte Integral auf ein solches zurückführen, worin der Exponent von $(a + bx^n)$ um eine Anzahl von Einheiten kleiner ist. Denn, da

$$x^m (a + bx^n)^p dx = (a + bx^n)^p d \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

ist, erhält man durch partielle Integration

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$
$$= \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{m+1} - \frac{pnb}{m+1} \int x^{m+n} (a + bx^n)^{p-1} dx. \qquad (\beta)$$

In dieser Formel ist allerdings der Exponent des Binoms $a + bx^n$ um eine Einheit niedriger geworden, aber der Exponent des ausserhalb der Klammern stehenden x hat um n Einheiten zugenommen. Um den letzteren Exponenten zu reduzieren, ändere man in der Gleichung (A) m in $m + n$ und p in $p - 1$; dann wird

$$\int x^{m+n} (a + bx^n)^{p-1} dx$$
$$= \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{b(np + m + 1)} - \frac{b(np + m + 1)}{(m + 1)a} \int x^m (a + bx^n)^{p-1} dx,$$

und folglich, nach Einsetzung dieses Wertes in (β),

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \frac{m+1}{x^{m+1}(a + bx^n)^p} - \frac{npx^{m+1}(a + bx^n)^p}{(m+1)(np + m + 1)}$$
$$+ \frac{anp}{np + m + 1} \int x^m (a + bx^n)^{p-1} dx,$$

oder, nach Reduktion

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$
$$= \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{np + m + 1} + \frac{anp}{np + m + 1} \int x^m (a + bx^n)^{p-1} dx. \qquad (B)$$

Mittels dieser Formel lassen sich aus p nacheinander alle Einheiten, die es enthält, fortnehmen.

357. Die Formel (B) hat keinen Sinn, wenn

$$np + m + 1 = 0$$

ist; man kommt aber dann auf den zweiten integrablen Fall (**354**) zurück und das gesuchte Integral ist durch Einführung einer neuen Veränderlichen zu erhalten.

Mittels der Formeln (A) und (B) kann also das Integral $\int x^m (a + b x^n)^p \, dx$, wenn m und p positiv sind, auf das einfachere Integral

$$\int x^{m-in} (a + b x^n)^{p-k} \, dx$$

zurückgeführt werden, worin i n das grösste in m enthaltene Vielfache von n und k den ganzen Teil von p bezeichnet.

So kann man z. B. die Integration von

$$\int x^7 (a + b x^3)^{\frac{5}{2}} \, dx$$

auf folgendem Wege auf die von $\int x (a + b x^3)^{\frac{1}{2}} \, dx$ zurückführen. Man reduziert nacheinander erstens mittels (A) auf die Integrationen

$$\int x^4 (a + b x^3)^{\frac{5}{2}} \, dx, \quad \int x (a + b x^3)^{\frac{5}{2}} \, dx,$$

und dann das letzte Integral mittels (B) auf die Integrationen

$$\int x (a + b x^3)^{\frac{3}{2}}, \quad \int x (a + b x^3)^{\frac{1}{2}} \, dx.$$

Reduktionsformeln für den Fall, dass die Exponenten m und p negativ sind.

358. Sind m und p negativ, so reduzieren die Formeln (A) und (B) das binomische Differential nicht auf eine einfachere Form; sie führen jedoch zu zwei neuen Formeln, mittels deren die Reduktion in diesem Falle bewirkt werden kann.

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, den Exponenten des ausserhalb der Klammern stehenden x zu verringern. Zu diesem Zwecke entnehmen wir aus (A) den Wert des Integrales

$$\int x^{m-n} (a + b x^n)^p \, dx$$

und erhalten

$$\int x^{m-n} (a + b x^n)^p \, dx$$
$$= \frac{x^{m-n+1} (a + b x^n)^{p+1}}{(m - n + 1) a} - \frac{b (m + n p + 1)}{(m - n + 1) a} \int x^m (a + b x^n)^p \, dx.$$

Setzen wir dann $-m$ für $m - n$ oder m für $-m + n$, so wird

$$\int x^{-m} (a + b x^n)^p \, dx$$
$$= -\frac{x^{-m+1} (a + b x^n)^{p+1}}{(m-1) a} + \frac{b (np + n - m + 1)}{(m-1) a} \int x^{-m+n} (a + b x^n)^p \, dx. \quad \text{(C)}$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel kann die gesuchte Integration auf die von

$$\int x^{-m+(i+1)n} (a + b x^n)^p \, dx$$

zurückgeführt werden, worin i n das grösste in m enthaltene Vielfache von n bezeichnet.

Ist

$$-m + (i + 1) n = n - 1,$$

so wird das letztere Integral

$$\int x^{n-1} (a + b x^n)^p \, dx = \frac{(a + b x^n)^{p+1}}{n b (p + 1)} + C.$$

Da aber dann

$$-\frac{m + 1}{n} = -i$$

eine ganze Zahl ist, so kommt man auf den ersten integrablen Fall zurück.

359. Ist p negativ, so entnehme man aus (B)

$$\int x^m (a + b x^n)^{p-1} \, dx$$

$$= -\frac{x^{m+1} (a + b x^n)^p}{a n p} + \frac{n p + m + 1}{a n p} \int x^m (a + b x^n)^p \, dx.$$

Setzt man hierin $-p$ statt $p - 1$ oder $-p + 1$ statt p, so wird

$$\int x^m (a + b x^n)^{-p} \, dx$$

$$= \frac{x^{m+1} (a + b x^n)^{-p+1}}{a n (p - 1)} - \frac{m + n + 1 - p n}{a n (p - 1)} \int x^m (a + b x^n)^{-p+1} \, dx.$$

Ist p grösser als 1, so wird der absolute Wert des Exponenten des Binoms um eine Einheit vermindert; durch wiederholte Reduktionen gelangt man also schliesslich zu einem zwischen 0 und 1 liegenden Exponenten.

Ist $p = 1$, so verliert die Formel ihren Sinn, aber dieser Fall ist integrabel.

360. Ein Differential von der Form

$$x^q (a x^r + b x^s)^p \, dx$$

kann auf die Form

$$x^{q+rp} (a + b x^{s-r})^p \, dx$$

gebracht und somit ein binomisches Differential werden.

361. Mittels der vorstehenden Formeln kann das Differential

$$\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

integriert werden, das überdies immer unter einen der integrablen Fälle gehört. Die Formel (A) giebt

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}\,dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Setzt man nacheinander $m = 1, 3, 5 \ldots$, so wird

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^4}{5}\sqrt{1-x^2} + \frac{4}{5}\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

. .

Es ist demnach

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{1.3}\right)\sqrt{1-x^2},$$

$$\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{x^4}{5} + \frac{4x^2}{3.5} + \frac{2.4}{1.3.5}\right)\sqrt{1-x^2},$$

und allgemein für ungerade m

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left[\frac{x^{m-1}}{m} + \frac{(m-1)x^{m-3}}{(m-2)m} + \ldots + \frac{2.4\ldots(m-1)}{1.3\ldots m}\right]\sqrt{1-x^2} + C.$$

Ist m gerade, so wird

$$\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\left[\frac{x^{m-1}}{m} + \frac{(m-1)x^{m-3}}{(m-2)m} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots m}\,x\right]\sqrt{1-x^2}$$

$$+ \frac{1.3.5\ldots.(m-1)}{2.4.6\ldots m}\arcsin x + C.$$

Übungen.

1. $$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}.$$

Auflösung. — Setzt man $x = \sin\varphi$, so nimmt das Integral die Gestalt $\int \frac{d\varphi}{\sin^5\varphi}$ an.

2. $$X = \int \frac{dx}{x(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Auflösung. — Von einer Konstante abgesehen, ist

$$X = \frac{1}{2a^2\sqrt{a}}\, l\, \frac{\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a}} + \frac{1}{a^2\sqrt{a+bx^2}} + \frac{1}{3a(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. $$X = \int \frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Auflösung.

$$X = \frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}} - \frac{bx^3}{3(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + C.$$

4. $$X = \int \frac{dx}{(c+ex^2)\sqrt{a+bx^2}}.$$

Auflösung. — Ist $bc - ae$ positiv, so wird

$$X = \frac{1}{2\sqrt{(bc+ae)c}}\, l\left(\frac{\sqrt{(a+bx^2)c}+x\sqrt{bc-ae}}{\sqrt{(a+bx^2)c}-x\sqrt{bc-ae}}\right) + C.$$

ist $bc - ae$ negativ, so wird

$$X = \frac{1}{2\sqrt{(ae-bc)c}} \text{ arc tang } \left(\sqrt{ae-bc}\,\frac{x}{\sqrt{(a+bx^2)c}}\right) + C.$$

5. $$X = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}};$$

man soll die Tangente, den Sinus und den Cosinus dieses Integrals angeben.

Auflösung. $X = \text{arc sin}\,\frac{x-2}{x\sqrt{5}} + C.$

Setzt man die willkürliche Konstante gleich Null, so wird

$$\sin X = \frac{x-2}{x\sqrt{5}},\quad \cos X = \frac{2\sqrt{x^2+x+1}}{x\sqrt{5}},\quad \text{tang } X = \frac{x-2}{2\sqrt{x^2+x-1}}.$$

Dreissigste Lektion.

Integration transcendenter Funktionen.

Funktionen, die sich auf algebraische Funktionen zurückführen lassen. — Integral von $z^n P\,dx$. — Integration einiger Exponential- und trigonometrischen Funktionen. — Integration der Produkte von sinus und cosinus. — Integration von $\sin^m x \cos^n x\,dx$.

Funktionen, die sich auf algebraische Funktionen zurückführen lassen.

362. Steht unter dem Integralzeichen eine algebraische Funktion einer transcendenten Grösse multipliziert mit dem Differential der letzteren, so kann man diese Funktion durch eine einfache Substitution auf eine algebraische Funktion zurückführen. Von solcher Art sind die Integrale

$$\int f(e^x)\,e^x\,dx,\ \int f(a^x)\,a^x\,dx,\ \int f(l\,x)\,\frac{dx}{x},$$

$$\int f(\sin x)\,\cos x\,dx,\ \int f(\cos x)\,\sin x\,dx,$$

$$\int f(\text{arc}\sin x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \int f(\text{arc tang}\ x)\,\frac{dx}{1+x^2},\ \ldots$$

Um z. B.

$$\int (l\,x)^n\,\frac{dx}{x}$$

zu erhalten, setze man $l\,x = z$, und folglich $\frac{dx}{x} = dz$,

so wird

$$\int (l\,x)^n\,\frac{dx}{x} = \int z^n\,dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} + C,$$

oder

$$\int (l\,x^n)\,\frac{dx}{x} = \frac{(l\,x)^{n+1}}{n+1} + C.$$

Integral von $z^n P dx$.

363. Ist eine Funktion wie $z^n P dx$ zu integrieren, worin z eine transcendente Funktion von x ist, so setze man

$$\int P dx = Q, \int Q \frac{dz}{dx} dx = R, \int R \frac{dz}{dx} dx = S, \ldots;$$

dann wird

$$\int z^n P dx = \int z^n dQ = Q z^n - n \int z^{n-1} Q dz,$$

$$\int z^{n-1} Q dz = \int z^{n-1} dR = R z^{n-1} - (n-1) \int z^{n-2} R dz,$$

$$\int z^{n-2} R dz = \int z^{n-2} dS = S z^{n-2} - (n-2) \int z^{n-3} S dz \ldots;$$

und folglich

$$\int z^n P dx = Q z^n - n R z^{n-1} + n(n-1) S z^{n-2} - \ldots. \quad (A)$$

Das Gesetz dieser Entwickelung ist deutlich zu erkennen. Man erhält das gesuchte Integral, wenn n eine ganze positive Zahl ist, und wenn man die mit Q, R, S bezeichneten Integrale bestimmen kann.

364. Beispiele.

1.
$$\int x^{m-1} (l x)^n dx.$$

Es ist

$$P = x^{m-1}, \quad z = l x, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x},$$

und folglich

$$Q = \frac{x^m}{m}, \quad R = \frac{x^m}{m^2}, \quad S = \frac{x^m}{m^3} \ldots;$$

also wird

$$\int x^{m-1} (l x)^n dx$$

$$= \frac{x^m}{m} \left[(lx)^n - \frac{n}{m} (lx)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2} (lx)^{n-2} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{m^n} \right] + C.$$

Setzt man hierin $l x = z$, so wird

$$\int z^n e^{mz} dz = \frac{e^{mz}}{m} \left[z^n - \frac{n}{m} z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2} z^{n-2} - \ldots \right] + C.$$

2.
$$\int (\text{arc} \sin x)^n dx.$$

Hier ist

$$z = \text{arc} \sin x, \quad P = 1.$$

Man erhält

$$Q = \int P dx = x,$$

$$R = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$S = \int -\sqrt{1-x^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x,$$

$$T = \int \frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2},$$

$$U = \int dx = x,$$

u. s. f.

Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Formel (A) und geeignete Anordnung der einzelnen Glieder wird

$$\int (\text{arc} \sin x)^n\, dx$$
$$= x\,[z^n - n\,(n-1)\,z^{n-2} + n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,z^{n-4} - \ldots]$$
$$+ \sqrt{1-x^2}\,[n\,z^{n-1} - n\,(n-1)\,(n-2)\,z^{n-3} + \ldots].$$

Ist n eine ganze positive Zahl, so hören diese Reihen nach einer endlichen Zahl von Gliedern auf.

Setzt man arc sin $x = z$, so wird

$$\sqrt{1-x^2} = \cos z, \quad dx = \cos z\, dz,$$

und die vorstehende Formel erhält die Gestalt

$$\int z^n \cos z\, dz$$
$$= \sin z\,[z^n - n\,(n-1)\,z^{n-2} + n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,z^{n-4} - \ldots]$$
$$+ \cos z\,[n\,z^{n-1} - n\,(n-1)\,(n-2)\,z^{n-3} + \ldots].$$

Diese Formel ergiebt sich übrigens auch aus einer allgemeineren. Es ist

$$\int f(x) \cos x\, dx = f(x) \sin x - \int f'(x) \sin x\, dx,$$
$$\int f'(x) \sin x\, dx = -f'(x) \cos x + \int f''(x) \cos x\, dx,$$
$$\int f''(x) \cos x\, dx = f''(x) \sin x - \int f'''(x) \sin x\, dx,$$

u. s. f. Folglich ist

$$\int f(x) \cos x\, dx = [f(x) - f''(x) + f''''(x) - \ldots] \sin x$$
$$+ [f'(x) - f'''(x) + f^{v}(x) - \ldots] \cos x;$$

das Integral kann somit immer erhalten werden, wenn f(x) eine ganze algebraische Funktion ist.

365. Ist n negativ oder gebrochen, so enthält (A) unendlich viele Glieder; um das Integral zu erhalten, sind alsdann besondere Kunstgriffe anzuwenden.

Beispiele.

1. $$\int \frac{dx}{(l\,x)^n};$$

n sei eine positive ganze Zahl.

Setzt man $l\,x = z$, so nimmt das Integral die Form an $\int \frac{e^z\,dz}{z^n}$, und durch partielle Integration wird

$$\int \frac{e^z\,dz}{z^n} = -\frac{e^z}{(n-1)\,z^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int e^z\,\frac{dz}{z^{n-1}}.$$

Mittels dieser Formel erhält man $\int \frac{e^z\,dz}{z^n}$ aus $\int \frac{e^z\,dz}{z}$, das nur durch eine Reihe zu berechnen ist, und das gesuchte Integral aus $\int \frac{dx}{l\,x}$.

2. $$\int \frac{e^x\,x\,dx}{(1+x)^2}.$$

Setzen wir $1 + x = z$, und folglich $x = z - 1$, so erhält das gegebene Integral die Form

$$\int \frac{e^{z-1}(z-1)}{z^2}\,dz = \int \frac{e^{z-1}}{z}\,dz - \int \frac{e^{z-1}\,dz}{z^2} = \frac{1}{e}\left(\int e^z\,\frac{dz}{z} - \int e^z\,\frac{dz}{z^2}\right).$$

Durch partielle Integration wird

$$\int \frac{1}{z}\,e^z\,dz = \int \frac{1}{z}\,d(e^z) = \frac{e^z}{z} - \int e^z\,d\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^z}{z} + \int e^z\,\frac{dz}{z^2},$$

und demnach

$$\int \frac{e^x\,x\,dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{e}\cdot\frac{e^z}{z} = \frac{e^{z-1}}{z} = \frac{e^x}{1+x}.$$

Integration einiger Exponential- und trigonometrischen Funktionen.

366. Die Integrale $\int e^{ax}\cos b\,x\,dx$ und $\int e^{ax}\sin b\,x\,dx$ können beide zusammen durch partielle Integration bestimmt werden. Da $e^{ax}\,dx = d\,\frac{e^{ax}}{a}$, so ist

$$\int e^{ax}\cos b\,x\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\cos b\,x + \frac{b}{a}\int e^{ax}\sin b\,x\,dx, \quad (1)$$

$$\int e^{ax}\sin b\,x\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\sin b\,x - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos b\,x\,dx. \quad (2)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\int e^{ax} \cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

367. Diese Integrale ergeben sich auch aus der Formel

$$\int e^{(a+b\sqrt{-1})x}\,dx = \frac{e^{(a+b\sqrt{-1})x}}{a + b\sqrt{-1}},$$

wenn man darin an Stelle der imaginären Exponenten deren trigonometrische Ausdrücke setzt, und dann die reellen und die imaginären Glieder auf beiden Seiten für sich gleich setzt.

Allgemeiner sind die Integrale

$$\int z^n e^{ax} \cos bz\,dz \text{ und } \int z^n e^{ax} \sin bz\,dz.$$

Um sie zu bestimmen, genügt es in **No. 364**, 1, letzte Formel, $a + b\sqrt{-1}$ statt m, und dann die reellen und die imaginären Glieder auf beiden Seiten für sich gleich zu setzen.

368. Die Integration von $f(\sin x, \cos x)\,dx$, worin f eine rationale Funktion bezeichnet, ist auszuführen, indem man $\tang \frac{1}{2} x = z$ setzt. Hieraus ergiebt sich

$$\sin x = 2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x = \frac{2z}{1+z^2},$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{1}{2} x - \sin^2 \frac{1}{2} x = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2},$$

und folglich

$$f(\sin x, \cos x)\,dx = f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2\,dz}{1+z^2},$$

ein Ausdruck, der in Bezug auf z rational ist.

369. Hier mögen noch einige trigonometrische Funktionen folgen, die häufig vorkommen und leicht zu integrieren sind.

1. $\int \sin x \cos x\,dx = \int \sin x\,d \sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$

Man kann auch setzen

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = \frac{1}{4} \int \sin 2x \, d(2x);$$

also ist

$$\int \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Diese beiden Ausdrücke für dasselbe Integral unterscheiden sich, wie leicht ersichtlich, nur durch eine Konstante.

2. $$\int \tang x \, dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -l \cos x + C,$$

oder

$$\int \tang x \, dx = l \frac{1}{\cos x} + C.$$

3. $$\int \cot x \, dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = l \sin x + C.$$

4. $$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{d \tang x}{\tang x} = l \tang x + C.$$

5. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\left(\frac{1}{2} x\right)}{\sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = l \tang \frac{1}{2} x + C.$$

6. $$\int \frac{dx}{\cos x} = -l \tang \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} x\right) + C.$$

Dieses Integral ist aus dem vorhergehenden zu erhalten, wenn $\frac{\pi}{2} - x$ statt x gesetzt wird.

7. $$\int dx \sqrt{1 + \cos x} = \int 2 \, d\left(\frac{1}{2} x\right) \sqrt{2} \sin \frac{1}{2} x$$

$$= -2\sqrt{2} \cos \frac{1}{2} x + C.$$

In gleicher Weise findet man

$$\int dx \sqrt{1 - \cos x} = 2\sqrt{2} \sin \frac{1}{2} x + C.$$

8. $$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}.$$

Man könnte hier das obige allgemeine Verfahren (**368**) einschlagen; zweckmässiger jedoch ist folgende Umformung.

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{dx}{\frac{a \sin x}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b \cos x}{\sqrt{a^2+b^2}}}.$$

Setzt man $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos k$, und folglich $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin k$,

so wird

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x+k)},$$

oder (5)

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \, l \operatorname{tang} \frac{x+k}{2} + C.$$

9. $$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}.$$

In diesem Falle ist die allgemeine Methode (**367**) anzuwenden. Setzt man $\operatorname{tang} \frac{1}{2} x = z$, so ist der rationale Bruch

$$\frac{2\,dz}{2az + b(1-z^2) + c(1+z^2)}$$

zu integrieren und man erhält entweder

$$\frac{2}{\sqrt{c^2-b^2-a^2}} \operatorname{arc tang} \frac{(c-b)\operatorname{tang}\frac{1}{2}x + a}{\sqrt{c^2-b^2-a^2}},$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}} \, l \, \frac{(c-b)\operatorname{tang}\frac{1}{2}x + a - \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{(c-b)\operatorname{tang}\frac{1}{2}x + a + \sqrt{a^2+b^2-c^2}} + C.$$

Integration der Produkte von Sinus und Cosinus.

370. Es sei zu bestimmen

$$\int \sin(ax+b) \sin(a'x+b')\,dx.$$

Nach einer bekannten Formel ist

$$\sin(ax+b)\sin(a'x+b')$$
$$= \frac{\cos[(a-a')x+b-b']}{2} - \frac{\cos[(a+a')x+b+b']}{2},$$

und folglich

$$\int \sin (a x + b) \sin (a' x + b') \, d x = \frac{\sin [(a - a') x + b - b']}{2 (a - a')}$$

$$- \frac{\sin [(a + a') x + b + b']}{2 (a + a')} + C.$$

Wenn $a = a'$, verliert diese Formel ihre Bedeutung, aber dann reduziert sich

$$\frac{\cos [(a - a') x + b - b']}{2} \, d x$$

auf $\frac{\cos (b - b')}{2} \, d x$, wovon das Integral $\frac{\cos (b - b')}{2} \, x$ ist.

Überhaupt wird es immer möglich sein ein Produkt von beliebig vielen Sinus und Cosinus zu integrieren, wenn die Bogen die Form $a x + b$ haben; weil dann das Produkt immer in eine Summe von Sinus oder Cosinus umgeformt werden kann.

371. Auf diese Weise findet man

$$\int \sin^n x \, d x \text{ und } \int \cos^n x \, d x,$$

wenn n eine positive ganze Zahl ist. Zweckmässiger jedoch entwickelt man $\sin^n x$ und $\cos^n x$ als Funktionen der Sinus und Cosinus der Vielfachen von x. So ist z. B.

$$\sin^5 x = \frac{1}{16} (\sin 5 x - 5 \sin 3 x + 10 \sin x),$$

und daher

$$\int \sin^5 x \, d x = \frac{1}{16} \left(- \frac{1}{5} \cos 5 x + \frac{5}{3} \cos 3 x - 10 \cos x\right) + C.$$

Integration der Differentiale von der Form $\sin^m x \cos^n x \, d x$.

372. Setzt man $\sin x = z$, und folglich

$$\cos x = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad d x = (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} d z,$$

so wird

$$\sin^m x \cos^n x \, d x = z^m (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} d z;$$

ist m eine positive oder negative ganze ungerade Zahl, so kann man also für beliebige m integrieren. Setzt man $\cos x = z$, so ist die Integration ebenfalls unter denselben Voraussetzungen ausführbar.

In jedem Falle kann man, welchen Wert m und n auch haben mögen, das Integral mittels partieller Integration auf einfachere zurückführen. Es ist

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \cos^{n-1} x \sin^m x \cos x\, dx$$

$$= \int \cos^{n-1} x \sin^m x\, d(\sin x) = \int \cos^{n-1} x\, d\, \frac{\sin^{m+1} x}{m+1},$$

und somit

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \cos^{n-1} x\, \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx. \quad (\beta)$$

Für negative m und positive n ist diese Formel zweckmässig. Man kann aber auch eine Formel erhalten, worin der Exponent n allein um zwei Einheiten abnimmt.

Es ist

$$\sin^{m+2} x \cos^{n-2} x = \sin^m x\, (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x,$$

oder

$$\sin^{m+2} x \cos^{n-2} x = \sin^m x \cos^{n-2} x - \sin^m x \cos^n x,$$

und folglich

$$\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x\, dx = \int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx - \int \sin^m x \cos^n x\, dx.$$

Nach Einsetzen dieses Wertes in (β) wird

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \cos^{n-1} x\, \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$$

$$+ \frac{n-1}{m+1} \left(\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx - \int \sin^m x \cos^n x\, dx \right),$$

oder

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx. \quad (B)$$

Auf diese Weise ist $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ auf $\int \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx$ zurückgeführt. Ebenso kann man letzteres auf $\int \sin^m x \cos^{n-4} x\, dx$ zurückführen u. s. w.; so gelangt man schliesslich, wenn m eine ganze positive Zahl ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist, zu einem der beiden Integrale $\int \sin^m x\, dx$, oder $\int \sin^m \cos x\, dx$, die sich bestimmen lassen. Denn erstens haben wir oben (**371**) gezeigt, wie

für ganze positive m, $\int \sin^m x\, dx$ zu berechnen ist, und ferner ist

$$\int \sin^m x \cos x\, dx = \int \sin^m x\, d \sin x = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} + C.$$

373. Die Formel (B) hat für $m = -n$ keinen Sinn, in diesem Falle giebt aber (β)

$$\int \operatorname{tang}^m x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^{m+1} x}{m+1} - \int \operatorname{tang}^{m+2} x\, dx.$$

Setzen wir nun m statt $m + 2$ oder $m - 2$ statt m und lösen in Bezug auf $\int \operatorname{tang}^m x\, dx$ auf, so erhalten wir

$$\int \operatorname{tang}^m x\, dx = \frac{\operatorname{tang}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tang}^{m-2} x\, dx. \qquad \text{(C)}$$

Mittels dieser Formel kann man den Exponenten von tang x verkleinern und gelangt schliesslich, je nachdem m gerade oder ungerade ist, zu

$$\int dx = x + C,$$

oder zu

$$\int \operatorname{tang} x\, dx = - l \cos x + C.$$

374. Durch die Formel (B) kann der Exponent von cos x verringert werden; setzt man aber in ihr $\frac{\pi}{2} - x$ für x und vertauscht m mit n, so wird

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx. \qquad \text{(D)}$$

Mittels dieser Formel kann für positive m der Exponent von sin x verkleinert werden.

Ist n eine ganze gerade Zahl, so kann, wie wir sahen, das gegebene Integral nach (B) auf $\int \sin^m x\, dx$ zurückgeführt werden. Mittels der Formel (D) ist es nun, wenn m ungerade, auf $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$, und wenn m gerade, auf $\int dx = x + C$ zurückzuführen: also wenn m und n positive ganze Zahlen sind, ist die Integration von

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$$

immer auszuführen.

375. Wenn einer der Exponenten m, n oder beide negativ sind, können die vorstehenden Formeln nicht angewendet werden.

Aber man kann aus ihnen andere ableiten, die in solchen Fällen die Reduktion des Integrals ermöglichen.

Angenommen, m ist negativ und n positiv oder negativ, so setzen wir in (D) $-m+2$ statt m, und erhalten durch Auflösung der Gleichung in Bezug auf das rechts stehende Integral

$$\int \frac{\cos^n x\,dx}{\sin^m x} = -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1)\sin^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{\cos^n x}{\sin^{m-2} x}\,dx. \quad (E)$$

Das gegebene Integral reduziert sich also, je nachdem m gerade oder ungerade ist auf $\int \cos^n x\,dx$ oder auf $\int \frac{\cos^n x}{\sin x}\,dx$.

376. Setzt man in (D) $n=0$, so wird

$$\int \sin^m x\,dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x\,dx, \quad (F)$$

und demnach für gerade m

$$\left.\begin{aligned} \int \sin^m x\,dx = -\frac{\cos x}{m}\Big[\sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3} x \\ + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}\sin^{m-5} x + \ldots + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3.1}{(m-2)(m-4)\ldots 4.2}\sin x\Big] \\ + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 3.1.x}{(m-2)(m-4)\ldots 4.2\,m} + C, \end{aligned}\right\} (G)$$

und für ungerade m

$$\int \sin^m x\,dx = -\frac{\cos x}{m}\Big[\sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2}\sin^{m-3} x + \ldots + \frac{(m-1)(m-3)\ldots 2}{(m-2)(m-4)\ldots 1}\Big] + C.$$

Analog erhält man auch

$$\int \cos^n x\,dx.$$

Übungen.

1. $$X = \int \frac{d\vartheta}{a + b\cos\vartheta};$$

der Fall $a = b$ ist gesondert zu behandeln, und das Resultat mit dem aus der allgemeinen Formel erhaltenen zu vergleichen.

Auflösung.

$$a > b,\ X = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{a \cos \vartheta + b}{a + b \cos \vartheta} + C,$$

$$a < b,\ X = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}}\, l\, \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \vartheta + \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} \vartheta - \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}} + C,$$

$$a = b,\ X = \frac{1}{a} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \vartheta + C.$$

2. $$X = \int \frac{\cos \vartheta\, d\vartheta}{(a + b \cos \vartheta)^2}.$$

Auflösung.

$$(a^2 - b^2)\, X = \frac{a \sin \vartheta}{a + b \cos \vartheta} - b \int \frac{d\vartheta}{a + b \cos \vartheta}.$$

Die Untersuchung kommt also auf den vorigen Fall zurück. Wenn $a = b$, ist

$$a^2 X = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \vartheta - \frac{1}{6} \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} \vartheta.$$

3. $$X = \int \frac{l\,(1-x)\, dx}{x \sqrt{x}}.$$

Auflösung.

$$X = -\frac{2}{\sqrt{x}}\, l\,(1-x) + 2\, l\, \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} + C.$$

Einunddreissigste Lektion.

Bestimmte Integrale.

Definitionen und Bezeichnungen. — Geometrische Bedeutung. — Beispiele bestimmter Integrale. — Integrale als Grenzwerte von Summen betrachtet. — Einzelne Bemerkungen. — Annähernde Berechnung bestimmter Integrale. — Neuer Beweis des Taylorschen Satzes.

Definitionen und Bezeichnungen.

377. Ist $\varphi(x)$ eine Funktion von x und $f(x)\,dx$ ihr Differential, so ist

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C,$$

und $\varphi(x) + C$ heisst das *unbestimmte Integral* des Differentials $f(x)\,dx$. Den Wert der willkürlichen Konstanten C bestimmt man gewöhnlich so, dass das Integral für einen besonderen Wert a von x Null wird.

Alsdann ist $C = -\varphi(a)$ und

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Dieser Ausdruck enthält noch die unbestimmte Grösse x, wenn man aber letzterer einen besonderen Wert b beilegt, so wird das Integral $\varphi(b) - \varphi(a)$ und ist vollständig bestimmt. Man stellt es durch das Zeichen $\int_a^b f(x)\,dx$ dar und bezeichnet es als *bestimmtes Integral*, genommen zwischen den Grenzen a und b, oder von $x = a$ bis $x = b$.

Demnach ist

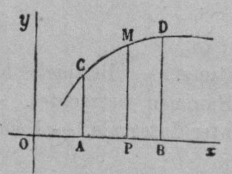
$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Man erhält also den Wert des bestimmten Integrals, wenn man in dem unbestimmten Integrale einmal $x = a$ und dann $x = b$ setzt und das erste Resultat von dem zweiten abzieht.

Geometrische Bedeutung des bestimmten Integrals.

378. Es sei C M D eine Kurve, die in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung $y = f(x)$ hat. Wie wir früher sahen, ist $f(x)\,dx$ das Differential der Fläche eines durch eine veränderliche Ordinate begrenzten Segments; $\int f(x)\,dx$ ist also allgemein eine von der Kurve, der Abscissenaxe und irgend zwei Ordinaten begrenzte Fläche. Wird aber die willkürliche Konstante so bestimmt, dass das Integral oder die Fläche für $x = OA = a$ Null wird, und ist $OP = x$ die Abscisse irgend eines Kurvenpunktes, so wird für diesen das Integral gleich der Fläche A C M P. Macht man $x = OB = b$; so wird demnach das Integral, das wir dann, wie oben bemerkt, durch $\int_a^b f(x)\,dx$ darstellen, gleich der Fläche C A B D, die zwischen der Kurve, der x-Axe und den beiden Ordinaten A C und B D liegt.

Fig. 73.



Beispiele bestimmter Integrale.

379. 1.
$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$$
$$\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}, \text{ wenn n positiv ist.}$$

2.
$$f(x) = \frac{1}{3x^2 - 2x + 5},$$
$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{14}} \text{ arc tang } \frac{3x-1}{\sqrt{14}} + C.$$
$$\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{14}}\left(\text{arc tang } \frac{5}{\sqrt{14}} - \text{arc tang } \frac{2}{\sqrt{14}}\right),$$
$$= \frac{1}{\sqrt{14}} \text{ arc tang } \frac{\sqrt{14}}{8}.$$

3.
$$\int \frac{dx}{x} = l\,x + C, \int_a^b \frac{dx}{x} = l\left(\frac{b}{a}\right).$$

4.
$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \text{ arc tang } \frac{x}{a} + C,$$
$$\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \text{ arc tang } 1 = \frac{\pi}{4a}.$$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arc\sin x + C, \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$

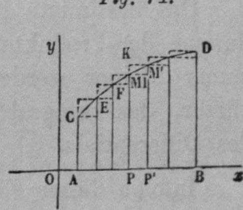
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \frac{\pi}{2}.$

Dieses Integral ergiebt sich aus der Formel (G) **No. 376**, indem an den beiden Grenzen alle Glieder mit Ausnahme des letzten Null werden.

Bestimmte Integrale als Grenzwerte von Summen betrachtet.

380. Im Vorstehenden ist f(x) von x = a bis x = b endlich und stetig vorausgesetzt. Unter dieser Voraussetzung ist *das bestimmte Integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *der Grenzwert, den die Summe der unendlich kleinen Differentiale* f(x) dx *annimmt, wenn x durch verschwindend kleine Änderungen aus a in b übergeht.*

Fig. 74.



Wir nehmen, um bestimmte Vorstellungen zu erhalten, $a < b$ an, und setzen voraus, dass f(x) von f(a) bis f(b) beständig zunimmt. Nun betrachten wir die Kurve CMD, deren Gleichung in rechtwinkligen Koordinaten

$$y = f(x)$$

sei, und machen OA = a, OB = b, OP = x, MP = y, PP' = Δx.

Wie wir in der Differentialrechnung sahen, ist die Fläche CADB gleich dem Grenzwert der Summe einer unendlich grossen Anzahl von Rechtecken wie MPP'J. — Nun ist MPP'J = f(x) Δx; bezeichnet $\sum [f(x)\,\Delta x]$ die Summe aller Rechtecke, so ist also

$$\text{Fl. CABD} = \int_a^b f(x)\,dx = \lim \sum [f(x)\,\Delta x] = \sum [f(x)\,dx],$$

was zu beweisen war.

Dieser Satz kann auch rein analytisch bewiesen werden. Denn ist $\varphi(x)$ irgend ein Integral von f(x) dx, so dass $f(x) = \varphi'(x)$, so hat man

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = [\varphi'(x) + \alpha]\,\Delta x,$$

oder

$$\Delta\varphi(x) = [f(x) + \alpha]\,\Delta x, \tag{1}$$

worin α eine Funktion von x ist, die gleichzeitig mit Δx verschwindet. Geht nun x durch beliebige, gleiche oder ungleiche, aber immer kleiner werdende Änderungen, von $x = a$ nach $x = b$ über, so erhält man für jeden Wert von x eine der Gleichung (1) analoge Gleichung, und durch Addition aller dieser Gleichungen auf der linken Seite die Summe aller Werte von $\Delta \varphi(x)$, d. h. die totale Änderung von $\varphi(x)$ oder $\varphi(b) - \varphi(a)$: also wird

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \sum [f(x) \Delta x] + \sum (\alpha \Delta x). \qquad (2)$$

Nach einem früher (**16**) bewiesenen Satze ist aber

$$\lim \sum (\alpha \Delta x) = 0;$$

die Gleichung (2) wird also beim Übergang zur Grenze

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b f(x)\, dx = \lim \sum [f(x) \Delta x] = \sum [f(x)\, dx].$$

Das bestimmte Integral ist also der Grenzwert, dem sich die Summe der Produkte von der Form $f(x) \Delta x$ nähert, wenn x durch immer kleiner werdende Änderungen aus a in b übergeht; oder kürzer, das Integral ist die Summe der unendlich kleinen Werte des Differentials.

Infolge dieser Eigenschaft bezeichnet man die Integrale durch das Zeichen $\int$, den Anfangsbuchstaben des Wortes Summe.

Bemerkungen über die bestimmten Integrale.

381. In der Formel

$$\int_a^b f(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a) \qquad (1)$$

kann a kleiner oder grösser als b sein. Gewöhnlich richtet man es so ein, dass $a < b$ ist. Findet der entgegengesetzte Fall statt, so kann er leicht auf den ersteren zurückgeführt werden.

Denn nach (1) ist

$$\int_b^a f(x)\, dx = \varphi(a) - \varphi(b); \qquad (2)$$

also ist

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

Also *man kann die Reihenfolge der Grenzen eines bestimmten Integrals vertauschen, wenn man das Vorzeichen desselben ändert.*

382. Ist c ein zwischen a und b liegender Wert von x, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a), \quad \int_a^c f(x)\,dx = \varphi(c) - \varphi(a)$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(c);$$

und folglich

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Diese Formel kann auch mit Hilfe des unter **No. 380** gegebenen Satzes bewiesen werden, oder indem man auf die geometrische Bedeutung der bestimmten Integrale zurückgeht.

Ebenso wird bewiesen, dass

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^e f(x)\,dx + \int_e^g f(x)\,dx + \int_g^h f(x)\,dx$$

ist, u. s. f.

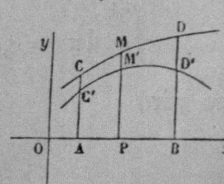
Annähernde Berechnung bestimmter Integrale.

383. Kann man ein gegebenes Differential $f(x)\,dx$ nicht integrieren, so lassen sich doch oft zwei Grenzen ausfindig machen, zwischen denen das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ liegt. Zu dem Zwecke nehmen wir eine Funktion $\psi(x)$ von solcher Beschaffenheit an, dass für alle zwischen a und b liegenden Werte von x $\psi(x) < f(x)$ ist; dann gilt die Ungleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b \psi(x)\,dx. \tag{1}$$

Dieses zeigt zunächst sehr einfach die Betrachtung der Kurven.

Fig. 75.



Denn haben die Kurven CMD und C'M'D' bezw. die Gleichungen $y = f(x)$ und $y = \psi(x)$, so ist von

$$x = OA = a \text{ bis } x = OB = b$$

$$f(x) > \psi(x);$$

die Kurve C'M'D' muss demnach zwischen den Ordinaten C A und B D unterhalb der Kurve C M D liegen, und folglich ist

$$\text{Fl. } CABD > \text{Fl. } C'ABD',$$

oder

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b \psi(x)\,dx. \qquad (2)$$

Man kann auch in folgender Weise schliessen. Da für alle x von $x = a$ bis $x = b$ $f(x) > \psi(x)$ ist, so wächst $\int_a^x [f(x) - \psi(x)]\,dx$, dessen Ableitung positiv ist, zugleich mit x, und da dasselbe für $x = a$ Null ist, so ist es immer positiv: also ist

$$\int_a^b [f(x) - \psi(x)]\,dx > 0, \text{ oder } \int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Ist dagegen $\chi(x)$ eine Funktion von solcher Beschaffenheit, dass von $x = a$ bis $x = b$ $\chi(x) > f(x)$, so erhält man ebenso

$$\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b \chi(x)\,dx. \qquad (2)$$

Sind demnach $\psi(x)\,dx$ und $\chi(x)\,dx$ zu integrieren, so hat man zwei Grenzen, zwischen denen $\int_a^b f(x)\,dx$ liegt.

384. Beispiel.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}.$$

Für $x < 1$, ist

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

und somit

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nun ist

$$\int_0^{\frac{1}{2}} dx = 0{,}5, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\frac{1}{2} = 0{,}5236;$$

also wird

$$0{,}5 < \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} < 0{,}5236 \ldots.$$

Neuer Beweis des Taylorschen Satzes.

385. Durch die Eigenschaften der bestimmten Integrale werden wir auf einen neuen Beweis des Taylorschen Satzes geführt. Es ist identisch

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^h f'(x+h-t)\,dt,$$

und durch partielle Integration

$$\int_0^t f'(x+h-t)\,dt = t f'(x+h-t) + \int_0^t t f''(x+h-t)\,dt,$$

$$\int_0^t t f''(x+h-t)\,dt = \frac{t^2}{1.2} f''(x+h-t) + \int_0^t \frac{t^2}{1.2} f'''(x+h-t)\,dt,$$

$$\int_0^t \frac{t^2}{1.2} f'''(x+h-t)\,dt = \frac{t^3}{1.2.3} f'''(x+h-t) + \int_0^t \frac{t^3}{1.2.3} f''''(x+h-t)\,dt,$$

u. s. f. Setzen wir $t = h$ und addieren alle diese Gleichungen, so erhalten wir

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x) + R,$$

wenn R den Rest

$$\frac{1}{1.2\ldots n} \int_0^h f^{n+1}(x+h-t)\, t^n\,dt$$

bezeichnet.

Ist nun M der grösste und m der kleinste Wert, den $f^{n+1}(x+h-t)$ von $t = 0$ bis $t = h$ annimmt, so wird

$$R < \frac{1}{1.2\ldots n} \int_0^h M t^n\,dt = \frac{M h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)},$$

$$R > \frac{1}{1.2\ldots n} \int_0^h m t^n\,dt = \frac{m h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}$$

R liegt also zwischen $\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} M$ und $\frac{h^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)} m$.

Wenn also die gegebene Funktion und alle ihre Ableitungen bis zur $(n+1)^{\text{ten}}$ zwischen den Grenzen x und $x+h$ endlich und stetig sind, so kann (**117**) R auf die Form gebracht werden

$$R = \frac{h^{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (n+1)} f^{n+1}(x + \vartheta h),$$

worin ϑ einen positiven echten Bruch bezeichnet.

Dieses Resultat stimmt mit dem auf anderen Wegen Gefundenen überein.

Zweiunddreissigste Lektion.

Fortsetzung der bestimmten Integrale. — Integration durch Reihen.

Integrale, deren Grenzen unendlich werden. — Integrale, worin die unter dem $\int$ stehende Funktion innerhalb der Integrationsgrenzen oder an ihnen unendlich wird. — Bestimmte Integrale ohne bestimmten Wert. — Integration durch Reihen. — Beispiele.

Bestimmte Integrale, deren Grenzen unendlich werden.

386. Bisher wurde angenommen, dass in dem Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ die beiden Grenzen a und b endlich sind, und dass die Funktion f(x) zwischen diesen Grenzen endlich und stetig ist.

Wir wollen nun sehen, was aus dem Integrale wird, wenn eine der Grenzen, z. B. b, unendlich ist, während f(x) endlich und stetig bleibt. Alsdann ist das Integral gleich dem Grenzwerte, dem sich $\int_a^b f(x)\,dx$ für unendlich wachsende b nähert. Derselbe kann, wie die folgenden Beispiele zeigen, endlich, unendlich oder auch unbestimmt sein.

387. 1.
$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx.$$

Zunächst ist

$$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C,$$

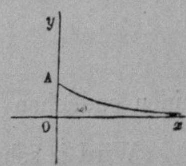
und somit

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = 1 - \frac{1}{e^b},$$

und, für $b = \infty$,

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

Fig. 76.



Konstruiert man die Kurve $y = \frac{1}{e^x}$, so erhält man einen unendlichen Zweig, für den die x-Axe Asymptote ist: das bestimmte Integral stellt also die von diesem Zweige, der Ordinate OA und der x-Axe begrenzte Fläche dar.

2. $$\int_0^\infty e^x\,dx.$$

Hier ist

$$\int_0^b e^x\,dx = e^b - 1, \quad \int_0^\infty e^x\,dx = \infty.$$

3. $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 - c^2}.$$

Das unbestimmte Integral ist

$$\int \frac{dx}{x^2 + c^2} = \frac{1}{c} \operatorname{arc\,tang} \frac{x}{c} + C;$$

somit wird

$$\int_0^b \frac{dx}{x^2 + c^2} = \frac{1}{c} \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{c},$$

und

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + c^2} = \frac{1}{c} \operatorname{arc\,tang} \infty = \frac{\pi}{2c}.$$

4. $$\int_a^\infty \frac{dx}{x}.$$

Es ist

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = l\,\frac{b}{a}, \quad \int_a^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

5. $$\int_0^\infty \cos x\,dx.$$

Es ist

$$\int_0^b \cos x\,d x = \sin b;$$

wenn aber b unendlich wird, nähert sich $\sin b$ keiner bestimmten Grenze. Also ist $\int_0^\infty \cos x\,d x$ unbestimmt.

388. Bisweilen lässt sich erkennen, ob das Integral

$$\int_a^b f(x)\,d x$$

einen endlichen Wert hat, wenn $b = \infty$ wird.

Wird b sehr gross, doch nicht unendlich angenommen, und bezeichnet k eine zwischen a und b liegende Grösse, so ist

$$\int_a^b f(x)\,d x = \int_a^k f(x)\,d x + \int_k^b f(x)\,d x.$$

Da f(x) nicht unendlich wird, ist der erste Teil des Integrals eine endliche Grösse, es ist also nur zu untersuchen, ob auch das zweite Integral $\int_k^b f(x)\,d x$ endlich ist. Wir bringen x auf die Form

$$f(x) = \frac{\omega(x)}{x^n},$$

worin $\omega(x)$ eine Funktion bezeichnet, die für alle $x > k$ endlich bleibt. Ist M der grösste, m der kleinste Wert von $\omega(x)$ für $x > k$; so ist

$$\frac{M}{x^n} > f(x) > \frac{m}{x^n},$$

und somit

$$\int_k^b f(x)\,d x < M \int_k^b \frac{d x}{x^n},$$

oder

$$\int_k^b f(x)\,d x < \frac{M}{n-1}\left(\frac{1}{k^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}}\right).$$

Für $n > 1$ und $b = \infty$ reduziert sich die zweite Seite dieser Gleichung auf $\frac{M}{n-1}\,\frac{1}{k^{n-1}}$. Das Integral $\int_a^\infty f(x)\,d x$ hat dann also einen endlichen Wert.

Für $n < 1$ ist

$$\int_k^b f(x)\,dx > m \int_k^b \frac{dx}{x^n},$$

oder

$$\int_k^b f(x)\,dx > \frac{m}{1-n}\,(b^{1-n} - k^{1-n}),$$

und da $1 - n$ positiv ist, wird für $b = \infty$ die rechte Seite dieser Ungleichung unendlich: also für $b = \infty$ ist $\int_k^b f(x)\,dx$ und folglich auch $\int_a^b f(x)\,dx$ unendlich.

Ist schliesslich $n = 1$, so wird

$$\int_k^b f(x)\,dx > m \int_k^b \frac{dx}{x} = m\,l\left(\frac{b}{k}\right),$$

und da für $b = \infty$ $l\left(\frac{b}{k}\right) = \infty$, so ist

$$\int_k^\infty f(x)\,dx = \infty.$$

Dasselbe gilt für das Integral

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx,$$

wenn $f(x)$ sich auf die Form $\frac{\omega(x)}{x^n}$ bringen lässt, und $\omega(x)$ für alle Werte von x, die zwischen $-\infty$ und einer bestimmten kleineren Grösse als b liegen, endlich ist: das Integral ist endlich für $n > 1$ und unendlich für $n \leqq 1$.

Integrale, worin die Funktion unter dem $\int$ zwischen oder an den Integrationsgrenzen unendlich wird.

389. Wird $f(x)$ für $x = b$ unendlich, so definieren wir $\int_a^b f(x)\,dx$ als die Grenze, der sich das Integral $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ nähert, wenn ε bis zur Null abnimmt. Ist $f(a) = \infty$, so ist ebenso $\int_a^b f(x)\,dx$ die Grenze von $\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$, wenn ε Null wird.

Wird ferner für $a < c < b$ $f(c)$ unendlich oder unstetig, so definieren wir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim \int_{c+\eta}^b f(x)\,dx,$$

wenn ε und η bis zur Null abnehmen.

Hiernach ist ersichtlich, wie $\int_a^b f(x)\,dx$ zu definieren ist, wenn $f(x)$ für mehrere zwischen a und b liegende Werte von x unendlich oder unstetig würde.

390. Wird $f(x)$ an einer der beiden Grenzen oder zwischen ihnen unendlich, so lässt sich oft feststellen, ob der Wert des Integrals unendlich oder endlich ist.

Angenommen, es sei

$$f(x) = \frac{\pi(x)}{(b-x)^n},$$

n eine positive Grösse und $\pi(x)$ eine Funktion, die für $x \leqq b$ nicht unendlich ist, so wird $f(b) = \infty$. Bezeichnet nun k eine zwischen a und b liegende, von b beliebig wenig verschiedene Grösse; so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^k f(x)\,dx + \int_k^b f(x)\,dx.$$

Nun ist $\int_a^k f(x)\,dx$ endlich; es bleibt also nur zu bestimmen, ob $\int_k^b f(x)\,dx$ endlich ist.

Sind M und m zwei Konstanten, zwischen denen $\pi(x)$ liegt, wenn x sich von k bis b ändert; so wird für solche Werte von x, wenn $n < 1$ ist,

$$f(x) < \frac{M}{(b-x)^n},$$

und demnach

$$\int_k^{b-\varepsilon} f(x)\,dx < \int_k^{b-\varepsilon} \frac{M\,dx}{(b-x)^n}$$

$$< \frac{M}{1-n}\left[(b-k)^{1-n} - \varepsilon^{1-n}\right].$$

Wird ε Null, so nimmt die rechte Seite dieser Gleichung den endlichen Wert $\frac{M}{1-n}(b-k)^{1-n}$ an; also hat $\lim \int_k^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ und somit auch $\int_a^b f(x)\,dx$ einen endlichen Wert.

Ist dagegen $n > 1$, so wird das vorliegende Integral unendlich. Denn es ist

$$f(x) > \frac{m}{(b-x)^n},$$

und folglich

$$\int_k^{b-\varepsilon} f(x)\,dx > m \int_k^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^n}$$

$$> \frac{m}{n-1}\left[\frac{1}{\varepsilon^{n-1}} - \frac{1}{(b-k)^{n-1}}\right];$$

ist $n > 1$, so wird die rechte Seite, wenn sich ε der Null nähert, unendlich. Also folgt a fortiori, dass auch $\int_k^b f(x)\,dx$ unendlich wird.

Das Gleiche findet für $n = 1$ statt. Denn aus der Ungleichung

$$f(x) > \frac{m}{b-x}$$

folgt

$$\int_k^{b-\varepsilon} f(x)\,dx > m \int_k^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x}$$

$$> m\,l\,\frac{b-k}{\varepsilon}.$$

Wenn ε in Null übergeht, wird die rechte Seite unendlich, also wird $\int_k^b f(x)\,dx$, und demnach auch $\int_a^b f(x)\,dx$ unendlich.

391. Beispiele.

1. $$\int_a^b \frac{P\,dx}{\sqrt{2b^2 - bx - x^2}},$$

a und b sind positiv, P eine Funktion von x, die für keinen zwischen a und b liegenden Wert von x unendlich wird.

Es ist

$$\frac{P}{\sqrt{2b^2 - bx - x^2}} = \frac{P}{\sqrt{2b + x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b-x}} = \frac{\pi(x)}{(b-x)^{\frac{1}{2}}},$$

wenn man

$$\frac{P}{\sqrt{2b+x}} = \pi(x)$$

setzt. Da der Exponent von b — x kleiner als 1 ist, folgt nach der oben gegebenen Regel, dass $\int_a^b \frac{P\,dx}{\sqrt{2b^2 - bx - x^2}}$ einen endlichen Wert hat.

2.
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Da

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x},$$

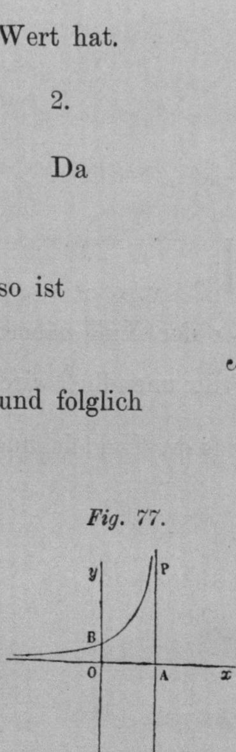
so ist

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon};$$

und folglich

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2.$$

Fig. 77.



Zur Veranschaulichung dieses Resultates konstruieren wir die Kurve $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Sie besitzt als Asymptoten die x-Axe und eine parallel zur y-Axe im Abstande O A = 1 gezogene Gerade A P. Demnach stellt $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ die von O B, O A, der Kurve und deren Asymptote A P begrenzte Fläche dar. Obgleich dieses Segment sich ins Unendliche ausdehnt, hat also seine Fläche doch einen endlichen Wert.

Integrale ohne bestimmten Wert.

392. Es kann vorkommen, dass ein bestimmtes Integral keinen bestimmten Wert hat, wie z. B.

$$\int_0^\infty \cos x\,dx = \sin\infty - \sin 0;$$

denn wenn x unendlich wird, nähert sich sin x keiner bestimmten Grenze.

Ein anderes Beispiel ist

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x},$$

wenn a und b zwei beliebige positive Grössen sind. Da $\frac{1}{x}$ für $x = 0$ unendlich wird, muss man

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \lim \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \lim \int_{\eta}^{+b} \frac{dx}{x}$$

setzen, und ε und η in Null übergehen lassen. Nun ist

$$\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} = l\,\varepsilon - l\,a, \int_{\eta}^{b} \frac{dx}{x} = l\,b - l\,\eta;$$

und somit

$$\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\eta}^{b} \frac{dx}{x} = l\,b - l\,a + l\,\varepsilon - l\,\eta.$$

Also wird

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = l\left(\frac{b}{a}\right) + \lim l\left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right).$$

Da aber die beiden Veränderlichen ε und η ganz unabhängig von einander sind, nähert sich $\frac{\varepsilon}{\eta}$ keiner bestimmten Grenze, und das Integral hat folglich keinen bestimmten Wert.

Integration durch Reihen.

393. Ist ein Differential $f(x)\,dx$ gegeben, und man kann $f(x)$ durch eine konvergente Reihe darstellen

$$f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + r_n, \tag{1}$$

so erhält man durch Multiplikation mit dx und Integration zwischen bestimmten Grenzen a und b

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \ldots + \int_a^b u_n\,dx + \int_a^b r_n\,dx. \tag{2}$$

Konvergiert die Reihe (1) für $x = a$, $x = b$ und alle zwischen a und b liegenden Werte von x, so kann man, für hinlänglich grosse n, r_n kleiner als eine beliebig kleine Grösse ε annehmen. Demnach ist

$$\int_a^b r_n\,dx < \int_a^b \varepsilon\,dx,$$

oder

$$\int_a^b r_n \, dx < \varepsilon (b - a).$$

Wenn n unendlich gross wird, nimmt also $\int_a^b r_n \, dx$ bis zur Null ab, und somit konvergiert die Reihe

$$\int_a^b u_1 \, dx + \int_a^b u_2 \, dx + \int_a^b u_3 \, dx + \ldots + \int_a^b u_n \, dx + \ldots,$$

und ihre Summe ist $\int_a^b f(x) \, dx$. Setzt man statt der bestimmten Grösse b die Veränderliche x, so wird

$$\int_a^x f(x) \, dx = \int_a^x u_1 \, dx + \int_a^x u_2 \, dx + \ldots \qquad (3)$$

394. Wird die Reihe $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, die für $x < b$ konvergiert, für $x = b$ divergent, so gilt die Formel (3) doch, wenn nur die Reihe (2) konvergent bleibt. Denn ist ε eine beliebig kleine positive Grösse, so ist

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x) \, dx = \int_a^{b-\varepsilon} u_1 \, dx + \int_a^{b-\varepsilon} u_2 \, dx + \int_a^{b-\varepsilon} u_3 \, dx + \ldots$$

Da nun beide Seiten stetige Funktionen von x sind, die beständig einander gleich sind, so müssen ihre Grenzwerte für $\varepsilon = 0$ auch gleich sein. Also ist

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b u_1 \, dx + \int_a^b u_2 \, dx + \int_a^b u_3 \, dx + \ldots$$

395. Lässt sich f (x) nach dem Maclaurinschen Satze durch eine konvergente Reihe darstellen

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \ldots,$$

so ist

$$\int f(x) \, dx = C + x f(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f'(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f''(0) + \cdots$$

Will man hieraus das bestimmte Integral $\int_0^x f(x) \, dx$ herleiten, d. h. soll das Integral von $x = 0$ anfangen, oder für $x = 0$ Null sein, so muss $C = 0$ sein. Dann ist

$$\int_0^x f(x) \, dx = x f(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f''(0) + \ldots.$$

Beispiele für die Integration durch Reihen.

396. 1.
$$\int \frac{dx}{1+x} = l\,(1+x),$$

Durch einfache Division erhält man
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \pm x^{n-1} \mp \frac{x^n}{1+x};$$
folglich ist
$$l\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^n}{n} \mp \int_0^x \frac{x^n\,dx}{1+x}.$$

Ist x seinem absoluten Betrage nach kleiner als 1, so konvergiert die Reihe $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$; folglich konvergiert auch die Reihe $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$ in denselben Grenzen für x.

Ist also $-1 < x < +1$, so ist
$$l\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Man kann auch direkt zeigen, dass $\int_0^x \frac{x^n\,dx}{1+x}$ für unendlich wachsende n sich der Null nähert.

Denn für positive x ist
$$\frac{x^n}{1+x} < x^n,$$
und somit
$$\int_0^x \frac{x^n\,dx}{1+x} < \int_0^x x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Für zunehmende n nähert sich die rechte Seite der Null; bricht man also die Reihe bei einem bestimmten Gliede ab, so ist der dadurch entstehende Fehler kleiner als das folgende Glied, und er wird positiv oder negativ sein, je nachdem das letzte berücksichtigte Glied eine gerade oder ungerade Ordnungszahl hat.

Ist x negativ und $1 > \alpha > x$, so erhält man
$$\frac{x^n}{1-x} < \frac{x^n}{1-\alpha};$$
und folglich
$$\int_0^x \frac{x^n\,dx}{1-x} < \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\alpha)}.$$

Für unendlich wachsende n hat dieser Ausdruck die Null zur Grenze. In diesem Falle hat der Fehler immer dasselbe Vorzeichen.

Für $x = 1$ wäre die Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$ nicht mehr konvergent, wohl aber die Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$; sie würde $l\,2$ darstellen (**394**). Also ist

$$l\,2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

2. $$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } x.$$

Es ist

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \pm x^{n-1} \cdot \mp \frac{x^{n+1}}{1+x^2},$$

wenn n eine positive ungerade Zahl ist.

Integriert man beiderseits und bezeichnet mit arc tang x den kleinsten positiven Bogen, dessen Tangente gleich x ist, so erhält man

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \pm \frac{x^n}{n} \mp \int_0^x \frac{x^{n+1}\,dx}{1+x^2}.$$

Für $x = 1$ konvergiert die Reihe $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$ nicht mehr, wohl aber die Reihe $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$; also wird

$$\text{arc tang } 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

3. $$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x.$$

Nach dem binomischen Satze ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots \qquad (1)$$

Durch Multiplikation der linken Seite mit dx und Integration erhält man

$$\text{arc sin } x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (2)$$

Diese Reihe konvergiert für $-1 < x < 1$; weil die Reihe (1) in diesen Grenzen konvergiert.

Für x = 1 konvergiert die Reihe (1) nicht mehr; da aber für $x = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$ die Reihe (2) noch konvergiert, so ist (**394**)

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.5.6}\cdot\frac{1}{7}\ldots$$

Eine schneller konvergierende Reihe erhält man, wenn man $x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ setzt:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^3.3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^5.5} + \ldots.$$

Dreiunddreissigste Lektion.

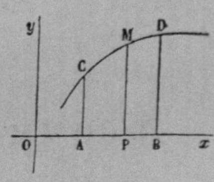
Geometrische Anwendungen der Integralrechnung.

Quadratur ebener Flächen.

Allgemeine Formeln. — Quadraturen in Parallelkoordinaten. — Quadraturen in Polarkoordinaten.

Allgemeine Formeln.

Fig. 78.



397. Die Kurve CMD habe in rechtwinkligen Koordinaten die Gleichung $y = f(x)$, und u bezeichne die Fläche ACMP. Sind dann x und y die Koordinaten des veränderlichen Punktes M, so ist

$$du = y\,dx = f(x)\,dx,$$

und demnach $u = \int f(x)\,dx$.

Soll die Fläche durch die der Abscisse OA = a entsprechende Ordinate CA begrenzt werden, so muss das Integral mit x = a beginnen und man hat

$$u = \int_a^x f(x)\,dx,$$

worin x die Abscisse eines beliebigen Kurvenpunktes darstellt.

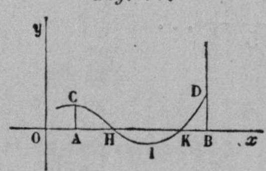
Wird ferner die Fläche durch die der Abscisse $x = OB = b$ entsprechende Ordinate BD begrenzt, so ist

$$u = \text{Fl. } ABCD = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Sind die Axen schiefwinklig, und ist ϑ der Axenwinkel, so wird

$$\text{Fl. } ABCD = \sin\vartheta \int_a^b f(x)\,dx.$$

Fig. 79.



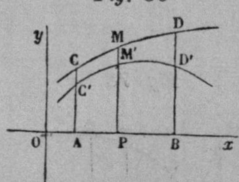
398. Das bestimmte Integral ist die Summe der unendlich kleinen Werte des Differentials zwischen den Grenzen a und b. Wird nun, wie gewöhnlich, dx positiv angenommen, so ist $f(x)\,dx$, d. h. das Differential der Fläche positiv oder negativ, je nachdem $f(x)$ oder die Ordinate y positiv oder negativ ist. Das Integral wird demnach die Differenz zwischen den Summen der über und der unter der x-Axe gelegenen Segmente darstellen. Ändert die Ordinate zweimal, z. B. zwischen AC und BD ihr Vorzeichen, so ist also

$$\int_a^b f(x)\,dx = ACH - HJK + KDB,$$

oder wenn h und k bezw. die Abscissen OH und OK bezeichnen,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^h f(x)\,dx - \int_h^k f(x)\,dx + \int_k^b f(x)\,dx.$$

Fig. 80



399. Ist die Fläche zu bestimmen, die von den Ordinaten CA, MP, dem Bogen CM und einem Bogen $C'M'$ einer zweiten Kurve

$$y' = \varphi(x)$$

begrenzt wird, so hat man

$$\text{Fl. } CC'MM' = \int_a^x y\,dx - \int_a^x y'\,dx = \int_a^x (y - y')\,dx.$$

Quadraturen in Parallelkoordinaten.

400. Wir betrachten nun einige Beispiele für die vorstehende Theorie.

Eine *Parabel* sei durch die Gleichung $y^n = p x^m$ gegeben, wenn m und n positiv sind. Setzen wir Fl. $OMP = u$, so ist

$$du = y\,dx = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}\,dx,$$

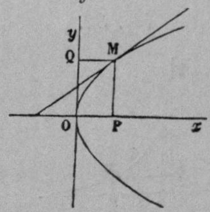
und folglich

$$u = \int_0^x y\,dx = \frac{n}{m+n} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m+n}{n}},$$

oder

$$u = \frac{n}{m+n} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}} x = \frac{n}{m+n} x y.$$

Fig. 81.



Nun stellt xy die Fläche des über den Koordinaten des Punktes M konstruierten Rechteckes dar; somit ist

$$OMP : OPMQ = n : (m+n),$$

oder

$$OMP : OMQ = n : m.$$

Die Parabel teilt also das Rechteck OPMQ in dem konstanten Verhältnisse von m : n.

401. Umgekehrt, nur die Parabeln besitzen diese Eigenschaft. Denn man kann die vorstehende Proportion schreiben

$$u : (xy - u) = n : m,$$

woraus folgt

$$(m+n)\,u = nxy.$$

Also ist

$$(m+n)\,du = n x\,dy + n y\,dx,$$

oder, da $du = y\,dx$,

$$(m+n)\,y\,dx = n x\,dy + n y\,dx,$$

oder schliesslich

$$m y\,dx = n x\,dy.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Form

$$m \frac{dx}{x} = n \frac{dy}{y}$$

und integriert, so erhält man

$$n\,l\,y = m\,l\,x + C \text{ oder } l\,y^n = l\,x^m + C.$$

Wird $C = l\,p$ gesetzt, so ergiebt sich als allgemeine Gleichung aller Kurven, die die hier betrachtete Eigenschaft besitzen,

$$l\,y^n = l\,p\,x^m,$$

oder

$$y^n = p\,x^m.$$

Bei der gewöhnlichen Parabel mit der Gleichung $y^2 = p x$ ist $n = 2$, $m = 1$, und somit

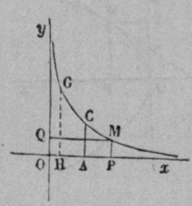
$$u = \frac{2}{3} x y.$$

402. Eine *hyperbolische* Kurve habe die Gleichung

$$x^m y^n = p;$$

m und n sind positive ganze Zahlen.

Fig. 82.



In der nebenstehenden Figur ist nur der in dem Winkel y O x gelegene Kurvenzweig dargestellt, der die beiden Axen zu Asymptoten hat.

Wir nehmen $n > m$ an, und setzen $ACMP = u$, $OA = a$, $OP = x$. Dann ist

$$u = \int_a^x y\,dx = \int_a^x p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}} dx,$$

und nach Ausführung der Integration

$$u = \frac{n}{n-m} p^{\frac{1}{n}} \left(x^{\frac{n-m}{n}} - a^{\frac{n-m}{n}} \right).$$

Nimmt x bis ins Unendliche zu, so wird auch die Fläche ACMP unendlich. Nimmt dagegen a bis zur Null ab, während MP unverändert bleibt, so nimmt die Fläche beständig zu, bleibt aber immer endlich, und an der Grenze, für $a = 0$, wird sie gleich

$$\frac{n}{n-m} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{n-m}{n}}.$$

Die Fläche ACGH nähert sich also um so mehr einer bestimmten Grenze, je mehr der Punkt G sich der Asymptote Oy nähert.

Diese Grenze ist gleich $\frac{n}{n-m} p^{\frac{1}{n}} x\, x^{-\frac{m}{n}}$, oder gleich $\frac{n}{n-m} x y$, und steht zu dem Rechtecke $OPMQ = xy$ in dem konstanten Verhältnisse von $n : n-m$. Also gilt die Proportion

$$u : xy = n : (n-m),$$

wenn u eine Fläche bezeichnet, die bei unbegrenzter Ausdehnung einen bestimmten Wert hat.

403. Umgekehrt nur die durch die Gleichung $x^m y^m = p$ dargestellten Kurven besitzen diese Eigenschaft. Denn aus der vorstehenden Proportion folgt

$$u(n-m) = n x y,$$

und somit

$$(n - m)\,du = n\,x\,dy + n\,y\,dx,$$

oder, da

$$du = y\,dx,$$

nach Division mit xy und Reduktion

$$-m\frac{dx}{x} = n\frac{dy}{y}.$$

Durch Integration erhält man also

$$n\,l\,y = C - m\,l\,x,$$

oder, wenn $C = -m\,l\,p$ gesetzt wird,

$$l\,y^n = l\frac{p}{x^m},$$

und folglich

$$x^m y^n = p.$$

Für den besondern Fall $m = n$ können wir statt der vorstehenden die Gleichung

$$xy = p$$

setzen, die eine gleichseitige Hyperbel zweiten Grades darstellt.

Es ist

$$y = \frac{p}{x},\ y\,dx = p\frac{dx}{x},$$

und somit

$$u = p\,l\,x + C = p\,l\frac{x}{a}.$$

Für $p = 1$, $a = 1$ wird

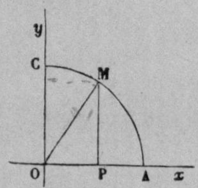
$$u = l\,x,$$

d. h. die Fläche ist gleich dem natürlichen Logarithmus der Abscisse (211, 2).

404. Ein *Kreis* sei gegeben durch die Gleichung

$$y^2 + x^2 = a^2,$$

Fig. 83.



woraus

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

folgt. Ist C O M P ein beliebiges von der y-Axe und einer willkürlichen Ordinate M P begrenztes Segment, und u dessen Fläche, so ist

$$u = \int_0^x dx \sqrt{a^2 - x^2}, \tag{1}$$

und durch partielle Integration erhält man

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \tag{2}$$

Es ist aber

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{(x^2 - a^2 + a^2)\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int dx \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung (2) ein ordnet und dividiert durch 2, so wird

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Nun ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc sin} \frac{x}{a} + C,$$

und folglich

$$u = \int_0^x dx \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \text{arc sin} \frac{x}{a}.$$

Hieraus ergiebt sich die Fläche des Sektors C O M. Denn das Dreieck O M P ist gleich $\frac{x \sqrt{a^2 - x^2}}{2}$; zieht man diesen Ausdruck von dem Segment ab, so wird

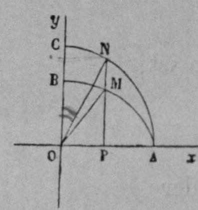
$$\text{Sector O C M} = \frac{a^2}{2} \text{arc sin} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} a \,\text{arc sin} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \text{arc C M};$$

d. h. *die Fläche eines Kreissectors ist gleich dem Produkt aus dem Bogen, auf dem er steht, mal der Hälfte des Radius.*

405. Eine *Ellipse* sei durch die Gleichung

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

Fig. 84.



gegeben, und u bezeichne das Segment OPMB, das von der y-Axe und irgend einer Ordinate MP begrenzt wird. Aus der Gleichung der Ellipse erhält man

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

und somit

$$u = \frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Beschreiben wir über der Axe 2a als Durchmesser einen Halbkreis, und bezeichnen mit u' die Fläche des Segments COPN, so ist

$$u' = \int_0^x dx \sqrt{a^2 - x^2};$$

folglich verhält sich

$$\frac{u}{u'} = \frac{b}{a}.$$

Also ein Ellipsen- und ein Kreissegment, die zu derselben Abscisse gehören, stehen zu einander in dem konstanten Verhältnisse von b : a.

Bezeichnet S die Fläche der ganzen Ellipse und S' die Kreisfläche, so ist demnach auch

$$S : S' = b : a,$$

und folglich, da

$$S' = \pi a^2,$$

$$S = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = \pi a b.$$

Also die Fläche der Ellipse ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Kreisflächen, deren Durchmesser bezw. die Axen der Ellipse sind.

406. Die beiden Dreiecke OMP und ONP verhalten sich wie ihre Höhen:

$$\frac{OMP}{ONP} = \frac{MP}{NP} = \frac{b}{a},$$

und da auch

$$\frac{u}{u'} = \frac{b}{a},$$

so ist

$$\frac{u - OMP}{u' - ONP} = \frac{b}{a},$$

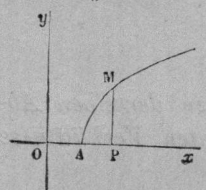
oder

$$\frac{OBM}{OCN} = \frac{b}{a}.$$

Da der Kreissektor OCN bekannt ist, kann durch diese Proportion auch der Ellipsensektor OBM bestimmt werden, und es ist leicht, zu einem beliebigen Sektor überzugehen.

Um eine Ellipse in eine gewisse Anzahl gleicher Sektoren zu teilen, genügt es, dass man den Kreis in derselben Weise teilen kann. Fällt man dann von den Teilpunkten Lote auf OA und verbindet die Punkte, wo sie die Ellipse treffen mit dem Mittelpunkte, so ist die Ellipse in gleiche Sektoren geteilt.

Fig. 85.



407. Bei der *Hyperbel*, deren Gleichung

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

ist, bestimmt man die Fläche des Segmentes AMP mittels Formel

$$u = \frac{b}{a} \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\, dx.$$

Man erhält durch partielle Integration

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Ferner ist

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{(x^2 - a^2 + a^2)\, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int dx \sqrt{x^2 - a^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

und (**347.** 1)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = l\,(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C;$$

also folgt

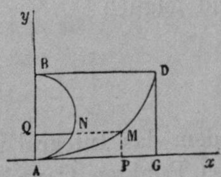
$$\int dx\sqrt{x^2-a^2}=\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}l\,(x+\sqrt{x^2-a^2})+C,$$

und

$$AMP=\frac{bx\sqrt{x^2-a^2}}{2a}-\frac{ab}{2}l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right).$$

408. Als letztes Beispiel betrachten wir die *Cykloide* AMD, die der Kreis ANB erzeugt, indem er auf der Geraden BD rollt. Als Koordinatenursprung wählen wir den Scheitelpunkt A, als Axen die Normale und die Tangente der Kurve in diesem Punkte. Die Cykloide hat dann die Differentialgleichung

Fig. 86.



$$dx=dy\sqrt{\frac{2a-y}{y}},$$

und somit ist

$$\text{Fl. } AMP=\int_0^y y\,dx=\int_0^y dy\sqrt{2ay-y^2}.$$

Wir ziehen nun MQ senkrecht auf AB, und es sei AQN das hierdurch von dem Kreise ANB abgeschnittene Segment.

Da $QN=\sqrt{2ay-y^2}$, so ist

$$\text{Segm. } AQN=\int_0^y dy\sqrt{2ay-y^2};$$

und folglich

$$AMP=\text{Segm. } ANQ.$$

Wird $x=\pi a$, und somit $y=2a$, so erhält man

$$ADG=\frac{\pi a^2}{2},$$

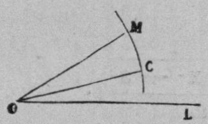
und durch Subtraktion dieser Fläche von dem Rechtecke ABDG $=2\pi a^2$ und Multiplikation mit 2

$$2\,AMDB=3\pi a^2;$$

d. h. *die von der Cykloide und ihrer Basis begrenzte Fläche ist gleich dem dreifachen Inhalte des erzeugenden Kreises.*

Quadraturen in Polarkoordinaten.

Fig. 87.



409. Sind r und ϑ die Polarkoordinaten des Punktes M und bezeichnet u die Sektorfläche C O M, so ist

$$du = \frac{1}{2} r^2 d\vartheta;$$

und folglich

$$u = \frac{1}{2}\int r^2 d\vartheta,$$

indem das Integral zwischen den Werten von ϑ zu nehmen ist, die den Punkten C und M entsprechen.

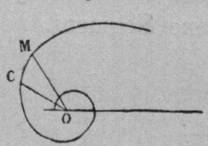
410. Als Beispiel betrachten wir die *logarithmische Spirale*, deren Gleichung

$$r = a e^{m\vartheta}$$

ist. Es ist

$$u = \frac{a^2}{2}\int e^{2m\vartheta} d\vartheta = \frac{a^2}{4m} e^{2m\vartheta} + C = \frac{r^2}{4m} + C.$$

Fig. 88.



Bezeichnet man O C mit r', und setzt in der vorstehenden Formel r = r', so wird

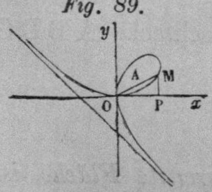
$$0 = \frac{r'^2}{4m} + C,$$

und somit

$$u = \frac{1}{4m}(r^2 - r'^2).$$

Bewegt sich der Punkt C auf der Kurve nach rückwärts, so nimmt der Radiusvektor bis zur Null ab, und die Sektorfläche nähert sich der Grenze $\frac{r^2}{4m}$.

Fig. 89.



411. Bisweilen wird durch Anwendung von Polarkoordinaten die Quadratur krummliniger Flächen erleichtert. Ein Beispiel dafür giebt die Kurve

$$x^3 + y^3 - axy = 0, \qquad (1)$$

die unter dem Namen *folium Cartesii* bekannt ist.

Dieselbe besteht aus zwei im Koordinatenursprunge sich kreuzenden unendlichen Zweigen, die als gemeinsame Asymptote eine Gerade mit der Gleichung

$$x + y + \frac{a}{3} = 0$$

besitzen.

Bei Anwendung der ursprünglichen Koordinaten erfordert die vorliegende Aufgabe die Auflösung einer Gleichung dritten Grades; führen wir aber Polarkoordinaten ein, und verlegen deren Ursprung in den Punkt O, so hat der Radiusvektor für eine gegebene Richtung immer nur einen Wert; denn da der Koordinatenursprung ein Doppelpunkt ist, so wird der Gleichung (1) durch zwei Werte $r = 0$ genügt, und ihre linke Seite ist somit durch r^2 teilbar.

Wählt man O x zur Axe der Polarkoordinaten, so ist in (1) $r \cos \vartheta$ statt x und $r \sin \vartheta$ statt y zu setzen, und man erhält

$$r^3 (\cos^3 \vartheta + \sin^3 \vartheta) - a r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta = 0,$$

oder

$$r = \frac{a \sin \vartheta \cos \vartheta}{\sin^3 \vartheta + \cos^3 \vartheta}. \tag{2}$$

Ferner ist, wenn u die Fläche des Segmentes O A M bezeichnet,

$$u = \frac{1}{2} \int_0^{\vartheta} r^2 \, d\vartheta;$$

und somit, wenn für r dessen Wert eingesetzt wird,

$$u = \frac{1}{2} \int_0^{\vartheta} \frac{a^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta}{(\cos^3 \vartheta + \sin^3 \vartheta)^2} \, d\vartheta$$

oder auch

$$u = \frac{a^2}{2} \int_0^{\vartheta} \frac{\operatorname{tang}^2 \vartheta \, \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}}{(1 + \operatorname{tang}^3 \vartheta)^2}.$$

Zur Bestimmung dieses Integrals setzen wir

$$1 + \operatorname{tang}^3 \vartheta = z, \text{ und folglich } dz = 3 \operatorname{tang}^2 \vartheta \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta},$$

so wird

$$\int \frac{\operatorname{tang}^2 \vartheta \frac{d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}}{(1+\operatorname{tang}^3 \vartheta)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{3z} + C = -\frac{1}{3(1+\operatorname{tang}^3 \vartheta)} + C,$$

und

$$u = -\frac{a^2}{6} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{tang}^3 \vartheta} + C.$$

Da die Fläche für $\vartheta = 0$, 0 sein soll, ist die Konstante

$$C = \frac{a^2}{6};$$

und folglich

$$u = \frac{a^2}{6} \frac{\operatorname{tang}^3 \vartheta}{1+\operatorname{tang}^3 \vartheta}.$$

Um die Fläche des ganzen Blattes zu erhalten, setzt man in dem Ausdrucke für u $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; der Quotient $\frac{\operatorname{tang}^3 \vartheta}{1+\operatorname{tang}^3 \vartheta} = \frac{1}{1+\cot^3 \vartheta}$ wird dann gleich 1, und somit $u = \frac{a^2}{6}$.

Übungen.

1. Die Fläche zu berechnen, die von der Evolute einer Ellipse mit den Axen 2a und 2b eingeschlossen wird.

Auflösung: $\frac{3}{8}\pi\frac{(a^2-b^2)^2}{ab}$.

2. In Polarkoordinaten zu bestimmen: die Gleichung der Kreis-Evolvente, ein Bogen derselben und der Sektor, der von diesem Bogen und den vom Kreismittelpunkte nach seinen Endpunkten gezogenen Geraden begrenzt wird.

Auflösung. — Es ist

die Gleichung der Evolvente $d\vartheta = \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{ar}\,dr$,

der Kurvenbogen $s = \frac{\sqrt{r^2-a^2}^2}{2a}$,

der Sektor $\frac{1}{6a}(r^2-a^2)^{\frac{3}{2}}$.

3. Zu berechnen: die zwischen den positiven Richtungen der Koordinatenaxen liegende Fläche, die von der Kurve

$$x^4 + y^4 - a^2 x y = 0$$

begrenzt wird.

Auflösung:

$$\frac{\pi a^2}{8}$$

Vierunddreissigste Lektion.

Rektifikation ebener Kurven.

Allgemeine Formel. — Beispiele: Parabel. — Ellipse. — Hyperbel. — Cykloide.

Allgemeine Formel.

412. Bezeichnet s einen Kurvenbogen, dessen einer Endpunkt fest sei, während der andere die rechtwinkligen Koordinaten x und y habe, so ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Um die Länge des Bogens zu bestimmen, hat man also nur für x oder y dessen aus der Gleichung der Kurve abgeleiteten Wert einzusetzen, und $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ zwischen geeigneten Grenzen zu integrieren.

Ist z. B. x Funktion von y, so bringen wir das Integral auf die Form

$$s = \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Rektifikation der Parabel.

413. Um z. B. die Länge eines Bogens einer *Parabel* zu bestimmen, die die Gleichung

$$y^2 = 2px$$

hat, ist in der Formel $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, worin y als Funktion von x aufgefasst werde, dx durch seinen aus der Differentialgleichung

$$y\,dy = p\,dx$$

entnommenen Wert zu ersetzen; man erhält

$$ds = \sqrt{\frac{y^2\,dy^2}{p^2} + dy^2} = \frac{dy}{p}\sqrt{y^2 + p^2}.$$

Beginnt der Bogen im Scheitel der Kurve, so ist also

$$s = \frac{1}{p}\int_0^y dy \sqrt{y^2 + p^2}.$$

Durch partielle Integration ergiebt sich

$$\int dy \sqrt{y^2 + p^2} = y\sqrt{y^2 + p^2} - \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^2 + p^2}};$$

ferner ist

$$\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{p^2 + y^2}} = \int dy \sqrt{y^2 + p^2} - p^2 \int \frac{dy}{\sqrt{p^2 + y^2}};$$

folglich wird

$$2\int dy \sqrt{y^2 + p^2} = y\sqrt{y^2 + p^2} + p^2 \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + p^2}}.$$

Nun ist (**347**, 1)

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + p^2}} = l\,(y + \sqrt{y^2 + p^2}) + C,$$

und somit

$$\frac{1}{p}\int dy \sqrt{y^2 + p^2} = \frac{y\sqrt{y^2 + p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\, l\,(y + \sqrt{y^2 + p^2}) + C.$$

Da das Integral für $y = 0$ Null werden soll, so ist

$$0 = \frac{p}{2}\, l\,p + C, \text{ oder } C = -\frac{p}{2}\, l\,p.$$

Durch Substitution dieses Wertes wird

$$s = \frac{y\sqrt{y^2 + p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\, l\left(\frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}\right).$$

Rektifikation der Ellipse.

414. Wir betrachten den Ellipsenbogen BM (Fig. 84. S. 325), den wir vom Scheitelpunkte B der kleinen Axe rechnen.

Aus der Gleichung der Kurve

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

folgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Also ist

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} = dx \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^2 (a^2 b^2 - b^2 x^2)}},$$

oder

$$ds = dx \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2) x^2}{a^2 (a^2 - x^2)}}.$$

Bezeichnen wir die Exzentrizität, d. h. das Verhältnis zwischen dem Abstande eines jeden Brennpunktes vom Mittelpunkte und der halben grossen Axe mit e, und setzen zur Vereinfachung

$$\sqrt{a^2 - b^2} = ae;$$

so wird

$$ds = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}.$$

Da sich x von 0 bis a ändert, erhält man alle Werte von x, wenn man

$$x = a \sin \varphi$$

setzt, und den Winkel φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zunehmen lässt. Dann wird

$$ds = a\, d\varphi \cos \varphi \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}} = a\, d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}.$$

Wir erhalten also schliesslich

$$s = \text{arc } BM = a \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}.$$

415. Das Integral $\int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ ist eine transcendente Funktion und nur durch Reihenentwickelung zu berechnen.

Nach dem binomischen Satze ist

$$(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} e^4 \sin^4 \varphi$$
$$- \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} e^6 \sin^6 \varphi - \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8} e^8 \sin^8 \varphi - \ldots;$$

man erhält also für den Bogen BM

$$s = a\Big(\varphi - \frac{1}{2} e^2 \int d\varphi \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \frac{1}{4} e^4 \int d\varphi \sin^4 \varphi$$
$$- \frac{1 \,.\, 1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} e^6 \int d\varphi \sin^6 \varphi - \ldots\Big). \qquad (1)$$

Die Integrale auf der rechten Seite sind zu bestimmen, indem man in Nr. **376**, (G) φ für x setzt. Dann wird

$$\left.\begin{aligned}\int \sin^m \varphi \, d\varphi = &- \frac{\cos \varphi}{m} \Big[\sin^{m-1} \varphi + \frac{m-1}{m-2} \sin^{m-3} \varphi \\ &+ \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)} \sin^{m-5} \varphi + \ldots \\ &+ \frac{(m-1)(m-3) \ldots 5 \,.\, 3 \,.\, 1}{(m-2)(m-4) \ldots 4 \,.\, 2} \sin \varphi\Big] \\ &+ \frac{(m-1)(m-3) \ldots 5 \,.\, 3 \,.\, 1}{(m-2)(m-4) \ldots 4 \,.\, 2} \frac{\varphi}{m}.\end{aligned}\right\} (2)$$

Da das Integral mit Null beginnen soll, wird ihm keine willkürliche Konstante zugesetzt.

416. Macht man in allen vorstehenden Integralen $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so erhält man ein Ellipsenviertel. Die Formel (2) giebt nach dieser Substitution

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \varphi \, d\varphi = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (m-3)(m-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots m} \cdot \frac{\pi}{2}; \qquad (3)$$

folglich wird dann

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} e^2 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} e^4 \frac{1.3}{2.4} \frac{\pi}{2} - \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{\pi}{2} - \ldots,$$

und somit

$$BMA = \frac{\pi a}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} e\right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1.3}{2.4} e^2\right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} e^3\right)^2 - \frac{1}{7} \left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} e^4\right)^2 - \ldots\right].$$

Diese Reihe konvergiert um so schneller, je kleiner e ist, oder je weniger sich b von a unterscheidet. Ist die Ellipse von dem über ihrer grossen Axe beschriebenen Kreise wenig verschieden, so braucht man nur wenige Glieder der Reihe zu berechnen, um ihren Wert mit hinlänglicher Genauigkeit zu erhalten.

417. Man gelangt zur Formel (3) auch ohne auf (2) zurückzugehen. Denn nimmt man in der Gleichung

$$\int \sin^m \varphi\, d\varphi = -\frac{\sin^{m-1} \varphi \cos \varphi}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} \varphi\, d\varphi$$

die Integrale zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so wird

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \varphi\, d\varphi = \frac{m-1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} \varphi\, d\varphi.$$

Ebenso ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2} \varphi\, d\varphi = \frac{m-3}{m-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-4} \varphi\, d\varphi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-4} \varphi\, d\varphi = \frac{m-5}{m-4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-6} \varphi\, d\varphi,$$

.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi\, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen mit einander wird wie oben **(416)**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \varphi = \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\ldots 3.1}{m(m-2)\ldots 4.2} \frac{\pi}{2},$$

und durch Einsetzen dieses Ausdruckes in den für s gelangt man wieder zu der bereits abgeleiteten Formel.

418. Der durch die Gleichung

$$x = a \sin \varphi$$

gegebene Winkel ist leicht zu konstruieren. Den beschreibt man (Fig. 84, S. 325) über der grossen Axe der Ellipse als Durchmesser einen Kreis, und verbindet O N, so ist

$$OP = x = ON \cos PON = a \sin CON;$$

folglich ist Winkel $CON = \varphi$.

Rektifikation der Hyperbel.

419. Bei der *Hyperbel*, die durch die Gleichung

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2$$

gegeben ist, hat man

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} = dx \sqrt{\frac{(a^2 + b^2) x^2 - a^4}{a^2 (x^2 - a^2)}}.$$

Bezeichnen wir das Verhältnis zwischen dem Abstande eines Brennpunktes vom Mittelpunkte und der halben Hauptaxe mit e und setzen zur Vereinfachung $\sqrt{a^2 + b^2} = a e$; so wird

$$ds = dx \sqrt{\frac{e^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}.$$

Da x sich von a bis unendlich ändert, setzen wir

$$x = \frac{a}{\cos \varphi}$$

und lassen φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ zunehmen.

Dann wird

$$dx = \frac{a \sin\varphi \, d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

$$ds = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{a^2 e^2 - a^2 \cos^2\varphi} = \frac{a e \, d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{e^2}};$$

und folglich

$$s = \text{arc } AM = \int_0^{\varphi} a e \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{e^2}}.$$

Zur Berechnung dieses Integrals entwickeln wir die Wurzel nach dem binomischen Satze; wir erhalten

$$s = a e \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}\Big[1 - \frac{1}{2}\frac{\cos^2\varphi}{e^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{\cos^4\varphi}{e^4} - \dots$$
$$- \frac{1.1.3\dots(2n-3)}{2.4.6..2n}\frac{\cos^{2n}\varphi}{e^{2n}} - \dots\Big],$$

oder

$$s = a e \operatorname{tang}\varphi - \frac{1}{2}\frac{a}{e}\varphi - \frac{a}{e}\int_0^{\varphi}\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{\cos^2\varphi}{e^2} + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{\cos^4\varphi}{e^4} + \dots\Big) d\varphi.$$

Es sind also noch Ausdrücke von der Form $\cos^m\varphi \, d\varphi$, wenn m gerade, zu integrieren. Diese Integrationen sind mit Hilfe der Formel Nr. **375** (F) auszuführen, wenn man darin $x = \frac{\pi}{2} - \varphi$ macht.

Rektifikation der Cykloide.

420. Wählt man dieselben Koordinaten wie in der vorhergehenden Lektion (**408**), so ist

$$dx = dy\sqrt{\frac{2a - y}{y}};$$

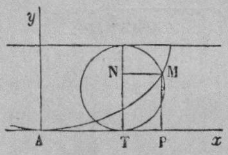
und folglich

$$ds = dy\sqrt{\frac{2a - y}{y} + 1} = dy\sqrt{\frac{2a}{y}} = 2\sqrt{2a}\,\frac{dy}{2\sqrt{y}},$$

und nach Integration zwischen 0 und y

$$s = \text{arc}\, AM = 2\sqrt{2a}\int_0^y \frac{dy}{2\sqrt{y}} = 2\sqrt{2a}\sqrt{y}.$$

Fig. 90.



Ziehen wir im Punkte M eine Tangente an die Cykloide, die die x-Axe im Punkte T treffe, so ist (**249**)

$$MT = \sqrt{2ay};$$

und somit

$$\text{arc}\, MA = 2\, MT.$$

Diese Gleichung ist uns schon bekannt (**254**).

Setzt man $y = 2a$, so erhält man $4a$ als Länge der halben Cykloide.

Übungen.

1. Die Kurve

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

ist zu rektifizieren.

Auflösung: $$s = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

wenn der Bogen von der y-Axe aus gerechnet wird.

2. $OM' = s'$, $OM'' = s''$ seien zwei Bogen, die im Koordinatenursprunge eine gemeinsame Tangente und in den Punkten $M'(x', y')$, $M''(x'', y'')$ parallele Tangenten haben; ferner sei $OM = s$ eine dritte Kurve, auf der irgend ein Punkt M durch die Gleichungen

$$x = a'x' + a''x'', \quad y = a'y' + a''y''$$

bestimmt ist; dann ist

$$s = a's' + a''s''.$$

Fünfunddreissigste Lektion.

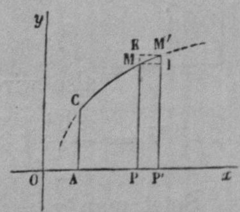
Kubatur der Körper.

Rotationskörper. — Beispiele: die durch Rotation einer Ellipse, oder Cykloide entstandenen Körper. — Durch eine einzige Integration berechenbare Volumina. — Durch beliebige Flächen begrenzte Volumina.

Kubatur der Rotationskörper.

421. Es sei V das Volumen, das die ebene Fläche CAMP erzeugt, indem sie um die Axe Ox rotiert. Nimmt x um $\Delta x = PP'$ zu, so erhält V die Zunahme ΔV, die gleich dem durch MM'PP' erzeugten Volumen ist.

Fig. 91.



Wird nun Δx hinlänglich klein angenommen, so dass y in dem Intervall MM' beständig zu- oder abnimmt, so liegt ΔV zwischen den Cylindervolumina, die durch die Rotation der Rechtecke MJPP' und KM'PP' entstehen. Wächst y, und wir bezeichnen die Ordinate M'P' mit Y, so ist demnach

$$\pi y^2 \Delta x < \Delta v < \pi Y^2 \Delta x,$$

oder

$$\pi y^2 < \frac{\Delta v}{\Delta x} < \pi Y^2.$$

Nimmt y ab, so gelten diese Ungleichungen in entgegengesetztem Sinne. In jedem Falle liegt aber das Verhältniss $\frac{\Delta V}{\Delta x}$ zwischen zwei Grössen, die mit abnehmendem Δx gegen einander konvergieren: an der Grenze wird somit

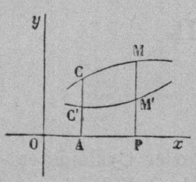
$$\frac{dV}{dx} = \pi y^2;$$

und folglich ist

$$V = \pi \int y^2 dx.$$

Man muss also aus der Gleichung der Kurve y als Funktion von x entwickeln, und zwischen den Grenzen integrieren, die den beiden Endpunkten des erzeugenden Bogens entsprechen.

Fig. 92.



422. Das durch die Fläche C M M' C' erzeugte Volumen ist die Differenz der durch die Flächen C M P A und C' M' P A erzeugten Volumina. Bezeichnen wir M P mit y und M' P mit y', so ist hiernach

$$V = \pi \int y^2 dx - \pi \int y'^2 dx,$$

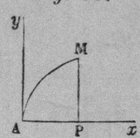
oder auch

$$V = \pi \int (y^2 - y'^2) dx.$$

Kubatur des Rotationsellipsoids.

423. Es sei V das Volumen, das ein Teil A M P der Ellipse erzeugt, indem diese um ihre grosse Axe rotiert. Die Gleichung der Ellipse, bezogen auf ihre grosse Axe und die Tangente, im Scheitel ist

Fig. 93.



$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2);$$

also wird

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^x (2ax - x^2) dx = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2 - \frac{x^3}{3}\right). \quad (1)$$

Setzt man $x = 2a$, so erhält man als Volumen des ganzen Ellipsoids

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(4a^3 - \frac{8a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi b^2 a. \quad (2)$$

Durch Vertauschung von a mit b in der vorstehenden Formel erhält man $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ für das Volumen, das die halbe Ellipse durch Rotation um die kleine Axe erzeugt; es ist also kleiner als das vorige.

Wird $b = a$, so ergiebt sich für das Volumen der Kugel $\frac{4}{3}\pi a^3$, und für das eines Kugelabschnittes $\frac{\pi x^2 (3a - x)}{3}$.

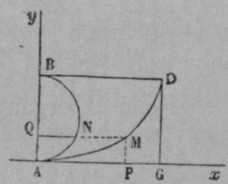
Das durch Rotation einer Cykloide erzeugte Volumen.

424. Als Axen wählen wir die Tangente und die Normale im Scheitel, und es sei V das Volumen des Körpers, den das Segment A M P durch Rotation um die x-Axe erzeugt.

Die Differentialgleichung der Cykloide war (**408.**)

$$dx = dy \sqrt{\frac{2a - y}{y}} = \frac{dy}{y} \sqrt{2ay - y^2};$$

Fig. 94.



somit ist

$$V = \pi \int_0^y y\, dy \sqrt{2ay - y^2},$$

oder auch

$$V = \pi a \int_0^y dy \sqrt{2ay - y^2} - \pi \int_0^y (a - y)\, dy \sqrt{2ay - y^2}.$$

Das erste Integral giebt die Fläche des Segmentes A Q N. (**408.**) Setzen wir zur Berechnung des zweiten $2ay - y^2 = z$, und folglich $2(a - y)\, dy = dz$; so wird

$$\int (a - y)\, dy \sqrt{2ay - y^2} = \int \sqrt{z} \frac{dz}{2} = \frac{1}{2} \int z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{3},$$

und demnach

$$V = \pi a \text{ Segm } AQN - \frac{\pi}{3} (2ay - y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

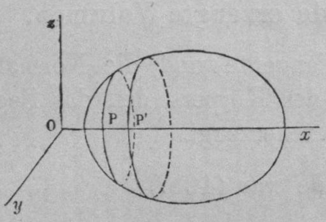
Das bei der Rotation von A Q M um die x-Axe entstehende Volumen ist gleich der Differenz der durch die Rotation des Rechtecks A P M Q und des Segments A M P erzeugten Volumina.

Durch eine einzige Integration berechenbare Volumen.

425. Ist die Fläche, worin eine der y z-Ebene parallele Ebene einen Körper schneidet, eine Funktion des Abstandes beider Ebenen; so kann das Volumen des Körpers durch eine einzige Integration erhalten werden.

Wir nehmen zunächst rechtwinklige Koordinatenaxen an. Es seien (Fig. a. d. folg. S.) u und $u + \Delta u$ die Flächen, worin zwei der y z-Ebene in Abständen x und $x + \Delta x$ parallel liegende Ebenen P und P′ den

Fig. 95.



den Körper schneiden. Die $\varDelta x$ entsprechende Volumenzunahme $\varDelta V$ liegt dann zwischen den beiden geraden Cylindern mit den Grundflächen u bezw. $u + \varDelta u$ und der Höhe $\varDelta x$. Nimmt man $\varDelta u$ positiv an, so ist demnach

$$u \varDelta x < \varDelta v < (u + \varDelta u) \varDelta x,$$

oder

$$u < \frac{\varDelta v}{\varDelta x} < u + \varDelta u.$$

Beim Übergang zur Grenze wird $\varDelta u = 0$; folglich ist

$$\frac{dV}{dx} = u, \quad dV = u\,dx.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die beiden Cylinder sich nicht schneiden; schneiden sie sich, so besitzen sie einen gemeinsamen cylindrischen Teil mit der Basis $u - \alpha$, wenn α eine sehr kleine Grösse ist, die zugleich mit $\varDelta x$ Null wird.

Ebenso bildet dieser gemeinsame Cylinder, wenn ihm die beiderseits heraustretenden Teile hinzugefügt werden, einen Cylinder mit der Basis $u + \beta$, wenn β ebenfalls zugleich mit u Null wird. Nun liegt $\varDelta V$ offenbar zwischen diesen beiden Grössen, und folglich ist

$$u - \alpha < \frac{\varDelta V}{\varDelta x} < u + \beta,$$

und an der Grenze

$$\frac{dV}{dx} = u, \quad dV = u\,dx.$$

Das Volumen, das zwischen zwei zur yz-Ebene parallelen und von ihr um a bezw. b abstehenden Ebenen liegt, ist also

$$V = \int_a^b u\,dx.$$

Das Volumen des ganzen Körpers erhält man, wenn man an ihn parallel zur yz-Ebene zwei Tangentialebenen legt und zwischen den Abständen, die sie von der ersteren haben, integriert.

426. Wir nehmen nun die Axe Ox nicht mehr senkrecht zu den Schnittebenen an und bezeichnen mit λ den Winkel zwischen der yz-Ebene und der Axe Ox. Vergleichen wir dann das von

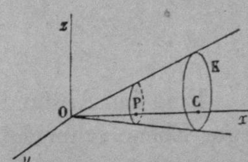
der Oberfläche des Körpers und zwei der yz-Ebene parallelen Ebenen begrenzte Volumen mit einem schiefen Cylinder, der zur Basis u, zur Höhe den gegenseitigen Abstand der beiden Ebenen hat, so ist

$$dV = u\,dx \sin\lambda, \text{ und } V = \sin\lambda \int u\,dx.$$

Diese Formel liesse sich leicht ebenso streng wie die vorhergehende beweisen; doch scheint es unnötig, länger dabei zu verweilen.

427. Es sei z. B. ein *Kegel mit beliebiger Basis* gegeben. Wir wählen als x-Axe das vom Scheitelpunkte auf die Basis gefällte Lot O C, und als yz-Ebene eine durch den Scheitel parallel zur Basis gelegte Ebene; ferner sei h die Höhe und b die Basis des Kegels.

Fig. 96.



Legen wir nun im Abstande O P = x parallel zu y O z eine Ebene durch den Kegel, so ist nach einem bekannten Satze die Fläche, worin sie den Kegel schneidet, $u = \frac{bx^2}{h^2}$; und folglich

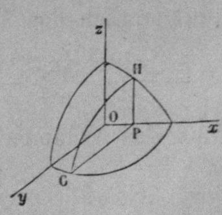
$$V = \int_0^x \frac{bx^2\,dx}{h^2} = \frac{bx^3}{3h^2}.$$

Macht man x = h, so erhält man für das Volumen des Kegels $\frac{bh}{3}$.

428. Ein *auf seine Hauptaxen bezogenes Ellipsoid* habe die Formel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Fig. 97.



Die Linie G P H, worin eine Ebene das Ellipsoid schneidet, die parallel der yz-Ebene im Abstande O P = x durch dasselbe gelegt ist, hat dann die Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

Setzt man successiv z = 0, y = 0, so erhält man für die Halbaxen

$$GP = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad PH = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}};$$

demnach ist der Inhalt der Schnittfläche gleich

$$\pi b c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{\pi b c}{a^2} (a^2 - x^2),$$

und das Volumen des zwischen den Ebenen y O z und G P H liegenden Segments

$$V = \frac{\pi b c}{a^2} \int_0^x d x (a^2 - x^2) = \frac{\pi b c}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right).$$

Wird hierin x = a gesetzt, so erhält man für das Volumen des halben Ellipsoids

$$V = \frac{\pi b c}{a^2} \left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{2}{3} \pi a b c.$$

Das Volumen des ganzen Ellipsoids ist also $\frac{4}{3} \pi a b c$.

429. Wir wollen nun ein Ellipsoid auf drei konjugierte schiefwinklige Durchmesser beziehen. Seine Gleichung hat die Form

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

Eine im Abstande x parallel zu y O z durch das Ellipsoid gelegte Ebene schneidet es in einer Ellipse, deren Gleichung

$$\frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = \frac{a'^2 - x^2}{a'^2}$$

ist, und die Längen der konjugierten Halbmesser, worauf sie bezogen wird, sind

$$\frac{b'}{a'} \sqrt{a'^2 - x^2}, \quad \frac{c'}{a'} \sqrt{a'^2 - x^2}.$$

Bezeichnet ϑ den Winkel zwischen beiden Durchmessern, so ist demnach die Schnittfläche

$$u = \frac{\pi b' c'}{a'^2} (a'^2 - x^2) \sin \vartheta;$$

und folglich das Volumen des Segments

$$V = \frac{\pi b' c' \sin \vartheta \sin \lambda}{a'^2} \int_0^x (a'^2 - x^2) d x = \frac{\pi b' c' \sin \vartheta \sin \lambda}{a'^2} \left(a'^2 x \frac{-x^3}{3}\right),$$

und das Volumen des ganzen Ellipsoids

$$\frac{4}{3} \pi a' b' c' \sin \vartheta \sin \lambda.$$

430. Durch Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem vorher für das Volumen des Ellipsoids gefundenen ergiebt sich

$$a' b' c' \sin \vartheta \sin \lambda = a b c:$$

also alle über konjugierten Durchmesser eines Ellipsoids konstruierten Parallelepipeda sind gleich dem über den Axen konstruierten rechtwinkligen Parallelepipedon.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt auch

$$\pi \, a\, b\, c = \pi \, a' b' c' \sin \vartheta \sin \lambda;$$

d. h. alle um das Ellipsoid beschriebenen Cylinder, deren Grundflächen den Ebenen der Berührungskurven parallel sind, sind unter sich gleich.

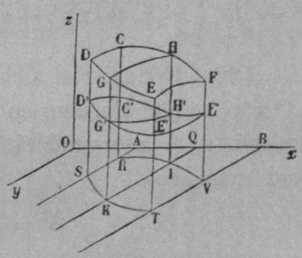
Von verschiedenen Flächen begrenzte Volumina.

431. Es sei eine beliebige Fläche C D E F mit der Gleichung

$$F(x, y, z) = 0$$

gegeben, und parallel zu y O z in Abständen O A = a, O B = b seien durch sie zwei Ebenen gelegt, die die Fläche in den Kurven C D und E F schneiden. Ferner sollen zwei gerade Cylinderflächen

Fig. 98.



$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x),$$

deren Basen die auf y O x liegenden Kurven R V und S T sind, die Fläche in den Kurven C F und D E schneiden. Wir könnten uns nun die Aufgabe stellen, das Volumen D C F E R V T S zu bestimmen; doch wollen wir lieber die Untersuchung verallgemeinern indem wir noch eine zweite Fläche C' D' E' F' mit der Gleichung

$$F_1(x, y, z) = 0$$

annehmen und den Ausdruck für das Volumen C D E F C' D' E' F' suchen.

Dazu legen wir in einem beliebigen zwischen a und b liegenden Abstande $x = O Q$ eine Ebene parallel zu y O z und bestimmen die Schnittfläche G H H' G'. Diese ebene Fläche liegt zwischen den beiden Kurven

$$z = f(x, y), \quad z_1 = f_1(x, y), \tag{1}$$

die man aus den Gleichungen der beiden Flächen erhält, wenn man darin der Veränderlichen x den konstanten Wert O Q beilegt. Ihr Differential ist $(z - z_1)\, d y$, indem nach den Gleichungen (1) z und z_1 Funktionen von y sind, die ein und demselben Werte des letzteren entsprechen.

Durch Integration zwischen den Grenzen y und y_1 erhält man demnach

$$\text{Fl. } GHG'H' = \int_y^{y_1} (z - z_1)\, dy.$$

Da somit $z - z_1$ eine Funktion von y ist, worin x als Konstante eintritt, erhält man als unbestimmtes Integral

$$\int (z - z_1)\, dy = \pi(x, y) + C.$$

Setzt man hierin successiv $y = \varphi(x)$ und $y = \psi(x)$, indem x als Konstante aufgefasst wird, so wird

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (z - z_1)\, dy = \text{Fl. } GHH'G' = \pi[x, \psi(x)] - \pi[x, \varphi(x)],$$

und dieser Ausdruck hängt nur noch von x ab.

Betrachten wir nun x als veränderlich, so erhalten wir für das gesuchte Volumen

$$V = \int_a^b \left\{ \pi[x, \psi(x)] - \pi[x, \varphi(x)] \right\} dx = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (z - z_1)\, dy.$$

432. Reduzieren sich die beiden Cylinderflächen auf zwei zu zOx parallele Ebenen, so werden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ gleich zwei Konstanten c, e, die unabhängig von dem Werte von $OQ = x$ sind, und man erhält

$$V = \int_a^b dx \int_c^e (z - z_1)\, dy.$$

433. Fällt die untere Fläche mit der xy-Ebene zusammen, so wird $z_1 = 0$, und

$$V = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\, dy$$

ist der Ausdruck für ein Volumen, das von einer beliebigen Fläche von der xy-Ebene, von zwei der z-Axe parallelen Cylinderflächen und von zwei zu zOy parallelen Flächen begrenzt wird.

434. Mittels des Vorstehenden können wir das Volumen eines beliebigen Körpers bestimmen, der überall von einer Fläche begrenzt wird, deren Gleichung $F(x, y, z) = 0$ bekannt ist.

Denken wir uns um die Fläche parallel der z-Axe einen Cylinder beschrieben, so ist in jedem Punkte (x, y, z) der Berührungskurve die Tangentenebene

$$\frac{dF}{dx}(X - x) + \frac{dF}{dy}(Y - y) + \frac{dF}{dz}(Z - z) = 0$$

vertikal, und folglich

$$\frac{dF(x, y, z)}{dz} = 0.$$

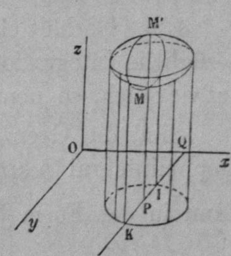
Die Elimination von z zwischen dieser Gleichung und der der Fläche ergiebt eine Gleichung

$$\psi(x, y) = 0,$$

die die Spur des Cylinders auf der xy-Ebene darstellt. Diese ist nach der Annahme eine geschlossene Kurve; wird sie durch eine zu yOz parallele Ebene geschnitten, so erhält man zwei Ordinaten $y = \varphi(x)$ und $y_1 = \varphi_1(x)$, die in der Figur durch QI und QK dargestellt sind und den gleichbezeichneten Linien in der vorhergehenden Untersuchung entsprechen.

Ebenso wird diese Ebene auf der Fläche eine geschlossene Kurve bestimmen, und wenn $z = MP$ und $z_1 = M'P$ die beiden zu $y = PQ$ gehörigen Werte von z sind, hat die Schnittfläche den Ausdruck

Fig. 99.



$$\int_y^{y_1} (z - z_1)\, dy.$$

Sind nun a und b die Abstände der Ebene yOz von den ihr parallelen Tangentenebenen, so ist das Volumen des Körpers

$$V = \int_a^b dx \int_y^{y_1} (z - z_1)\, dy.$$

Übungen.

1. Aus der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ wird durch die beiden Cylinder

$$y^2 + x^2 - rx = 0,$$
$$y^2 + x^2 + rx = 0$$

ein Teil herausgeschnitten; das Volumen des übrigbleibenden sphärischen Körpers ist $\frac{16}{9} r^3$.

2. Ein Körper wird begrenzt von der xy-Ebene und den Flächen

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1, \quad z = \frac{xy}{c};$$

sein Volumen ist zu berechnen.

Auflösung: $V = \frac{\pi a b \alpha \beta}{c}$.

Sechsunddreissigste Lektion.

Mehrfache Integrale. — Inhalt krummer Flächen.

Doppelintegrale. — Dreifache Integrale. — Reihenfolge der Integrationen. — Quadratur krummer Flächen. Inhalt der Rotationsflächen. — Anwendung auf die Kugel und das Ellipsoid.

Doppelintegrale.

435. Enthält ein Ausdruck zwei auf verschiedene Veränderliche bezügliche Integrationen, wie z. B. die am Ende der vorigen Lektion entwickelten, so nennt man ihn ein *Doppelintegral.*

Sind die Grenzen beider Integrationen angegeben, so ist das Doppelintegral *bestimmt;* andernfalls ist es *unbestimmt* und wird dann in der Form $\int\int z\,dx\,dy$ dargestellt.

436. Ein Doppelintegral $\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy$ ist der Grenzwert der Summe aller zwischen den Integrationsgrenzen liegenden Produkte von der Form $z\,\varDelta x\,\varDelta y$.

Denn es ist $\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy$ das bestimmte, zwischen den Grenzen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ genommene Integral von $z\,dy$, wobei x als konstant betrachtet wird, und somit (**375**)

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy = \lim \sum (z\,\varDelta y).$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit $\varDelta x$, und lässt x von $x = a$ bis $x = b$ zunehmen, so ist demnach

$$\sum \left(\varDelta x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy\right) = \sum \left[\varDelta x \lim \sum (z\,\varDelta y)\right].$$

Wenn nun die Werte von x sich immer näher rücken, wird

$$\lim \sum \left(\varDelta x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy\right) = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy.$$

Da andrerseits x in dem Ausdrucke $\sum (z\,\Delta y)$ als konstant betrachtet wird, ist

$$\lim \sum \left[\Delta x \lim \sum (z\,\Delta y)\right] = \lim \sum \left[\lim \sum (z\,\Delta y\,\Delta x)\right],$$

oder auch

$$\lim \sum \left[\Delta x \lim \sum (z\,\Delta y)\right] = \lim \sum\sum (z\,\Delta y\,\Delta x):$$

also ist

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy = \lim \sum\sum (z\,\Delta y\,\Delta x),$$

was zu beweisen war.

437. Dieser Satz kann auch durch geometrische Betrachtungen bewiesen werden. Ist

$$z = F(x, y)$$

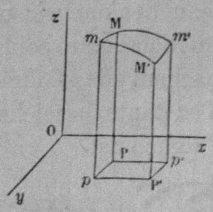
die Gleichung einer Fläche, so stellt, wie wir oben (**433**) sahen, das Doppelintegral

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy$$

das Volumen dar, das zwischen dieser Fläche, der xy-Ebene, zwei zur z-Axe parallelen Cylinderflächen und zwei zur yz-Ebene parallelen Ebenen liegt.

Wir nehmen nun auf der Fläche neben einander zwei beliebige Punkte M, M' an, und konstruieren das Rechteck PP', dessen der x- und der y-Axe parallele Seiten durch die Punkte P, P' gehen, die die Fusspunkte der durch M und M' parallel zur z-Axe gezogenen Geraden bilden. Die Ebenen MPp, mpP', M'P'p', m'p'P schneiden dann die Fläche in einem gekrümmten Vierseit MM', und es ist das Volumen V die Summe aller solcher Körper wie MP', wenn sie zwischen geeigneten Grenzen genommen werden.

Fig. 100.



Ist MP = z, und $z - \alpha$ der kleinste, $z + \beta$ der grösste Abstand zwischen irgend einem Punkte der Fläche MM', und der xy-Ebene, so liegt das Volumen MP', das wir mit ΔV bezeichnen, zwischen zwei rechtwinkligen Parallelepipeden, deren gemeinsame Basis PP' und deren Höhen bezw. $z - a$ und $z + b$ sind.

Da ferner $PP' = \Delta x \, \Delta y$, so ist

$$(z - \alpha) \, \Delta x \, \Delta y < \Delta v < (z + \beta) \, \Delta x \, \Delta y,$$

oder

$$z - \alpha < \frac{\Delta v}{\Delta x \, \Delta y} < z + \beta,$$

und da α und β mit Δx und Δy Null werden, ist

$$\lim \frac{\Delta v}{\Delta x \, \Delta y} = z:$$

somit ist

$$\Delta v = z \, \Delta x \, \Delta y \, (1 + \eta),$$

worin η zugleich mit Δx und Δy verschwindet.

Zu jedem Δx gehören unendlich viele Δy, die aus dem Körper ein Stück herausschneiden, dessen Volumen gleich

$$\sum [z \, \Delta x \, \Delta y \, (1 + \eta)]$$

ist. Lassen wir dann x sich ändern, d. h. nehmen wir die übrigen Werte von Δx, so entstehen unendlich viele Stücke, deren Summe, beim Übergange zur Grenze das Volumen V giebt; folglich ist

$$V = \lim \sum [z \, \Delta x \, \Delta y \, (1 + \eta)].$$

Nun ist aber

$$\sum \sum [z \, \Delta x \, \Delta y \, (1 + \eta)] = \sum \sum (z \, \Delta x \, \Delta y) + \sum \sum (\eta \, z \, \Delta x \, \Delta y),$$

und

$$\sum \sum (\eta \, z \, \Delta x \, \Delta y) = 0;$$

denn denken wir uns in der Fläche alle Punkte M, M' u. s. w. hinlänglich nahe bei einander liegend, so ist es immer möglich zu machen, dass für einen jeden $\eta < \varepsilon$ ist, wenn ε eine willkürliche Konstante bezeichnet, die beliebig klein angenommen werden kann. Folglich ist

$$\sum \sum (\eta \, z \, \Delta x \, \Delta y) < \sum \sum (\varepsilon \, z \, \Delta x \, \Delta y), \text{ oder } < \varepsilon \sum \sum (z \, \Delta x \, \Delta y).$$

Der letztere Ausdruck wird aber an der Grenze Null; da ε beliebig klein anzunehmen, und $\sum \sum (z \, \Delta x \, \Delta y)$ endlich ist. Also

wird schliesslich

$$V \text{ oder } \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} z\,dy = \lim \sum\sum (z \Delta x \Delta y).$$

Dreifache Integrale.

438. Es sei $U = f(x, y, z)$ eine Funktion von drei unabhängigen Veränderlichen x, y, z. Wird das Differential $U\,dz$ nach z integriert, d. h. indem x und y als konstant betrachtet werden, und lässt man z sich zwischen zwei Grenzen ändern, die durch zwei Funktionen von x und y, $f(x, y)$ und $F(x, y)$, gegeben sind; so erhält man das Integral

$$\int_{f(x,y)}^{F(x,y)} U\,dz,$$

das eine Funktion von x und y ist.

Wir betrachten nun x in der Funktion

$$dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} U\,dz$$

als konstant. Wird dieselbe nach x integriert, indem sich y zwischen zwei durch $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ dargestellten Grenzen ändert; so erhält man das Integral

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} U\,dz,$$

das eine Funktion von x ist.

Integriert man schliesslich das Differential

$$dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} U\,dz$$

nach x, indem sich x zwischen zwei beliebigen Grenzen a und b ändert, so erhält man

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} U\,dz.$$

Dieser Ausdruck heisst *dreifaches Integral*; man schreibt ihn auch

$$\sum U\,dx\,dy\,dz.$$

Analog kann man Integrale von beliebiger Ordnung bilden.

Es kann nun auch für dreifache Integrale bewiesen werden, dass

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{f(x,y)}^{F(x,y)} U\,dz = \lim \sum \sum \sum (U \varDelta x \varDelta y \varDelta z).$$

Da jedoch der Beweis ganz demjenigen ähnlich ist, den wir für die Doppelintegrale gegeben haben, ganz ähnlich ist, so unterlassen wir hier eine Wiederholung.

Satz über die Reihenfolge der Integrationen.

439. Oben (**431**) erhielten wir als Ausdruck eines Volumens, das von zwei beliebigen Flächen, zwei der z-Axe parallelen Cylinderflächen und zwei der yz-Ebene parallelen Ebenen begrenzt wird, das Doppelintegral

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (z - z_1)\, dy.$$

Die Reihenfolge der Integrationen ist hier nicht gleichgültig, und man würde im allgemeinen das gesuchte Resultat durch die Formel

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \int_a^b (z - z_1)\, dx$$

nicht erhalten. Wenn jedoch $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Konstanten a' und b' sind, d. h. wenn die der z-Axe parallelen Cylinderflächen sich auf zwei Ebenen reduzieren, so ist es gleichgültig, mit welcher Integration man beginnt; denn wiederholen wir die Schlüsse von No. **431**, so sehen wir, dass das betrachtete Volumen beliebig durch den einen oder den anderen der beiden Ausdrücke

$$\int_a^b dx \int_{a'}^{b'} (z - z_1)\, dy \text{ oder } \int_{a'}^{b'} dy \int_a^b (z - z_1)\, dx$$

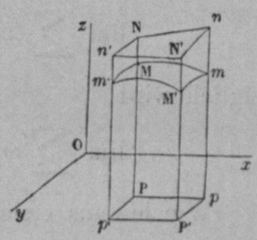
darzustellen ist.

Der Inhalt krummer Flächen.

440. Unter dem Inhalt einer krummen Fläche versteht man den Grenzwert, den der Inhalt einer aus ebenen Flächen zusammengesetzten Polyederfläche annimmt, wenn die ersteren, indem sie unendlich klein werden, zur Berührung mit der gegebenen Fläche übergehen. Ferner setzt man voraus, dass der Umriss, der die Polyederfläche begrenzt, sich unbeschränkt demjenigen der krummen Fläche nähert.

Wir werden zunächst die Existenz dieser Grenze nachweisen.

Fig. 101.



Wir nehmen auf der Fläche zwei Punkte M (x, y, z) und M' $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ an, und es seien P und P' ihre Projektionen auf die xy-Ebene Alsdann bilden wir das Rechteck $PP' = \Delta x\, \Delta y$, dessen Seite zu Ox und Oy parallel sind, und konstruieren darüber ein Prisma von unbegrenzter Höhe, dessen Basis das Rechteck ist und dessen Seiten senkrecht auf der xy-Ebene stehen. Dieses Prisma schneidet aus der gegebenen Fläche ein krummliniges Vierseit MM' und aus der Polyederfläche eine Fläche ω heraus, die entweder eben oder aus den ebenen Teilen a, a', a'' u. s. w. zusammengesetzt ist.

Alle diese Ebenen konvergieren aber unbegrenzt gegen die Tangentenebene der Fläche im Punkte M; sind daher ϑ, ϑ', ϑ'' die Winkel zwischen den Ebenen a, a', a'' und der xy-Ebene, und λ der Winkel, den letztere mit der Tangentenebene in M bildet, so ist

$$\cos\vartheta = \cos\lambda\,(1 + \alpha),\ \cos\vartheta' = \cos\lambda\,(1 + \alpha'),\ \ldots;$$

wenn α, α' u. s. w. Grössen bezeichnen, die gleichzeitig mit Δx und Δy Null werden. Das Rechteck PP' ist aber die Summe der Projektionen aller hier betrachteten Dreiecke; folglich ist

$$\Delta x\,\Delta y = a\cos\lambda\,(1 + \alpha) + a'\cos\lambda\,(1 + \alpha') + a''\cos\lambda\,(1 + \alpha'') + \ldots;$$

oder

$$\frac{\Delta x\,\Delta y}{\cos\lambda} = a + a' + a'' + \ldots + (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots),$$

oder auch, da $a + a' + a'' + \ldots = \omega$,

$$\frac{\Delta x\,\Delta y}{\cos\lambda} = \omega + (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots).$$

Verfahren wir in gleicher Weise in Bezug auf die ganze gegebene Fläche, so erhalten wir eine Anzahl der vorstehenden analoger Gleichungen, die zu ihr addiert die Gleichung ergeben

$$\sum \frac{\Delta x\,\Delta y}{\cos\lambda} = \sum \omega + \sum (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots):$$

also ist

$$\lim \sum \frac{\Delta x\,\Delta y}{\cos\lambda} = \lim \sum \omega + \lim \sum (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots).$$

Nun ist nach einem früher (No. **16**) bewiesenen Satze

$$\lim \sum (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots) = 0;$$

folglich wird

$$\lim \sum \omega = \lim \sum \frac{\Delta x \Delta y}{\cos \lambda} = \iint \frac{dx\, dy}{\cos \lambda}.$$

Wie hieraus ersichtlich, hat die Polyederfläche eine Grenze.

441. Bezeichnet A den Inhalt der Fläche, so ist demnach

$$A = \iint \frac{dx\, dy}{\cos \lambda}.$$

Bezeichnen p und q die partiellen Ableitungen $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$, die aus der Gleichung der Fläche erhalten werden, so ist

$$\cos \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

und es wird

$$A = \iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy.$$

Ist die Fläche durch die Ebenen $x = a$, $x = b$ und die Cylinderflächen $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ begrenzt, so wird

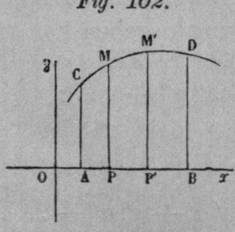
$$A = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

zu diesen Grenzen gelangen wir auf demselben Wege wie oben (**431**).

Inhalt der Rotationsflächen.

442. Der Inhalt einer Rotationsfläche wird durch eine einzige Integration erhalten. Es sei CMD eine ebene Kurve, die durch Rotation um die in ihrer Ebene gelegene x-Axe die Fläche erzeugt, deren Inhalt zu bestimmen ist. Ferner sei CMM′D eine gebrochene in die Kurve eingeschriebene Linie. Den Inhalt der gegebenen Fläche kann man als den Grenzwert betrachten, dem sich die Summe der abgestumpften durch die gebrochene Linie erzeugten Kegelflächen nähert, wenn die Seiten

Fig. 102.



der letzteren unendlich klein werden, während ihre Anzahl ins Unendliche wächst.

Sind M (x, y) und M′ (x + $\varDelta$x, y + $\varDelta$y) zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Ecken der gebrochenen Linie, so ist die durch Rotation von MM′ erzeugte Fläche gleich

$$\frac{1}{2}\, MM' (\text{circ } MP + \text{circ } M'P'),$$

oder

$$\pi\, (2y + \varDelta y)\, \varDelta x \sqrt{1 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2}.$$

Nun ist aber

$$\lim\, (2y + \varDelta y) \sqrt{1 + \left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2} = 2y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \text{ und}$$

somit die abgestumpfte Kegelfläche gleich

$$2\pi y \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \alpha\right] \varDelta x,$$

wenn α eine mit $\varDelta$x verschwindende Grösse bezeichnet: die durch die gebrochene Linie beschriebene Fläche ist folglich gleich

$$\sum 2\pi y \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} + \alpha\right] \varDelta x.$$

Bezeichnet A die gesuchte Fläche, so ist demnach

$$A = \lim \sum \left[2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, \varDelta x\right] + 2\pi y \lim \sum (\alpha\, \varDelta x).$$

Aber es ist (**16.**) $\lim \sum (\alpha\, \varDelta x) = 0$, und

$$\lim \sum \left[2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, \varDelta x\right] = 2\pi \int_a^b y\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

also wird

$$A = 2\pi \int_a^b y\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

worin a und b die Abscissen der beiden Endpunkten des Bogens CD sind.

Bezeichnet s einen von einem bestimmten Anfangspunkte gerechneten Bogen, so ist

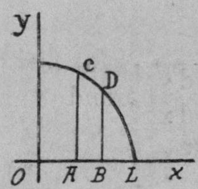
$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

und folglich

$$A = 2\pi \int_a^x y\, ds.$$

Fläche einer Zone.

Fig 103.



443. Die vorstehende Formel wenden wir nun zur Berechnung der Zone an, die entsteht, indem ein Kreisbogen C D um den Durchmesser O L rotiert.

Es sei

$$x^2 + y^2 = R^2$$

die Gleichung des Kreises. Ist $OA = a$, $OB = b$ und A die Fläche der Zone, so ist

$$A = 2\pi \int_a^b y\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= 2\pi \int_a^b y\, dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = 2\pi \int_a^b R\, dx;$$

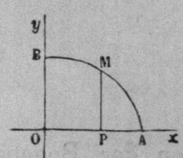
wir gelangen also schliesslich zu der bekannten Formel

$$A = 2\pi R\,(b - a) = 2\pi R \cdot \overline{AB}.$$

Um die gesamte Kugelfläche zu erhalten, muss man von $x = -R$ bis $x = R$ integrieren, wodurch sich der bekannte Ausdruck $4\pi R^2$ ergiebt.

Fläche des Rotationsellipsoids.

Fig. 104.



444. Die Ellipse O A B drehe sich um eine ihrer Axen O A; wir wollen die Fläche berechnen, die dabei der Bogen B M beschreibt, der im Endpunkte B der anderen Axe beginnt. Es ist (**442**)

$$A = 2\pi \int_0^x y\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Nun ergiebt sich aus der Gleichung der Ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y};$$

folglich ist

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^4y^2+b^4x^2}{a^4y^2}}.$$

Ersetzen wir hierin a^2y^2 durch $a^2b^2 - b^2x^2$, so wird

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{b\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a^2y}.$$

Zuerst werde $a > b$ angenommen, d. h. die Ellipse drehe sich um ihre grosse Axe. Setzen wir $\sqrt{a^2-b^2} = ae$, so wird

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{b\sqrt{a^4-a^2e^2x^2}}{a^2y} = \frac{b\sqrt{a^2-e^2x^2}}{ay},$$

und folglich

$$A = 2\pi\frac{b}{a}\int_0^x dx\sqrt{a^2-e^2x^2} = \frac{2\pi be}{a}\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^2}{e^2}-x^2}.$$

Nun ist (**404**)

$$2\int_0^x dx\sqrt{\frac{a^2}{e^2}-x^2} = x\sqrt{\frac{a^2}{e^2}-x^2} + \frac{a^2}{e^2}\arcsin\frac{ex}{a};$$

also wird

$$A = \frac{\pi be}{a}\left(x\sqrt{\frac{a^2}{e^2}-x^2} + \frac{a^2}{e^2}\arcsin\frac{ex}{a}\right).$$

445. Setzt man in diesem Ausdrucke $x = a$ und multipliziert ihn mit 2, so erhält man für die gesamte Fläche des Ellipsoids

$$2\pi b^2 + \frac{2\pi ba}{e}\arcsin e.$$

Ist $e = 0$, so wird das Ellipsoid eine Kugel, und wenn man beachtet, dass für $e = 0$, $\lim\frac{\arcsin e}{e} = 1$ ist, findet man für die Kugelfläche $4\pi a^2$.

446. Ist $a < b$ und $\sqrt{b^2 - a^2} = b e$, so wird

$$A = 2\pi \int_0^x y\, dx \, \frac{b \sqrt{a^4 + (b^2 - a^2) x^2}}{a^2 y} = \frac{2\pi b}{a^2} \int_0^x dx \sqrt{a^4 + b^2 e^2 x^2}$$

$$= \frac{2\pi b^2 e}{a^2} \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2}.$$

Nun ist

$$\int dx \sqrt{x^2 + c} = \frac{x \sqrt{x^2 + c}}{2} + \frac{c}{2} l \left(x + \sqrt{x^2 + c}\right) + C;$$

und folglich

$$A = \frac{\pi b^2 e}{a^2} \left[x \sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2} + \frac{a^4}{b^2 e^2} l \left(x + \sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2} \right) \right] + C.$$

Da das Integral für $x = 0$ Null werden muss, so ist

$$C = - \frac{\pi b^2 e}{a^2} \cdot \frac{a^4}{b^2 e^2} l \frac{a^2}{b e},$$ und somit

$$A = \frac{\pi b^2 e}{a^2} \left[x \sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2} + \frac{a^4}{b^2 e^2} l \left(\frac{x + \sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2}}{\frac{a^2}{b e}} \right) \right].$$

Setzt man $x = a$ und multipliziert mit 2, so wird die gesamte Fläche des Ellipsoids

$$2\pi b \sqrt{a^2 + b^2 e^2} + \frac{2\pi a^2}{e} l \left(\frac{b e + \sqrt{a^2 + b^2 e^2}}{a} \right).$$ [1]

[1]) Wird für $b^2 e^2$ der gleichwertige Ausdruck $b^2 - a^2$ eingesetzt, so gestaltet sich die Formel einfacher. Sie wird dann

$$2\pi b^2 + \frac{2\pi a^2}{e} l \frac{b e + b}{a} = 2\pi b^2 + 2\pi a^2 l \left[\frac{b}{a} (e + 1) \right]^{\frac{1}{e}}.$$

Für $a = b$, ist $\frac{b}{a} = 1$, $e = 0$, $(1 + e)^{\frac{1}{e}} = 1$, und es ergiebt sich für die Fläche der Sphäre $2\pi b^2 + 2\pi a^2 = 4\pi a^2$.

447. Setzt man e = 0 und entwickelt

$$\sqrt{a^2 + b^2 e^2} = a \left(1 + \frac{b^2 e^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

nach dem binomischen Satze, so findet man leicht

$$\lim \frac{l \dfrac{(b e + \sqrt{a^2 + b^2 e^2})}{a}}{e} = 1.$$

Man gelangt also wiederum zu dem Ausdrucke $4 \pi a^2$ für die Kugelfläche.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Übungen zur Differentialrechnung.[1]

1. Wieviel reelle Wurzeln hat die Gleichung

$$\sin(x-\alpha) - m \sin^4 x = 0?$$

2. Dieselbe Frage ist zu beantworten bezüglich der Gleichung

$$x\, e^{-\sin\frac{\alpha}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = m.$$

3. Die Gleichung $\tang z = z$ hat keine imaginären Wurzeln.

4. Die imaginären Wurzeln der Gleichung $\tang z = kz$ sind anzugeben.

5. Die n^{te} Ableitung von $e^{\frac{1}{x}}$ und danach die n^{te} Ableitung von $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ sind zu bestimmen.

6. Die n^{ten} Ableitungen von e^{-x^2} und $\varphi(x^2)$ sind zu bestimmen.

7. Die n^{te} Ableitung von $\varphi(e^x)$?

8. Die n^{te} Ableitung von $\varphi(\log x)$?

9. Welche Änderungen erleidet das Verhältnis zwischen der Summe der die drei Seiten eines Dreiecks berührenden Kreisflächen und dem Inhalt des umgeschriebenen Kreises?

10. Dieselbe Frage ist bezüglich der Kreisumfänge zu beantworten.

11. Die Änderungen des Ausdruckes

$$u = (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)^2 + (a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma)^2$$

sind zu erörtern, wenn α, β, γ veränderliche Winkel bezeichnen.

12. Der geometrische Ort des Scheitels eines konstanten um eine Cykloide beschriebenen Winkels ist zu bestimmen.

13. Der geometrische Ort der Mittelpunkte der Ellipsen, die in einem gegebenen Punkte mit einer gegebenen Kurve eine Berührung dritter Ordnung besitzen, ist anzugeben.

14. Ebenso der geometrische Ort der Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbeln, die in einem gegebenen Punkte mit einer gegebenen Kurve eine Berührung zweiter Ordnung besitzen.

15. Zu bestimmen: der Ort der Brennpunkte und die Einhüllende der Axen der Parabeln, die in einem gegebenen Punkte eine Berührung zweiter Ordnung mit einer gegebenen Kurve besitzen.

16. Zu bestimmen: die Gleichung des Kegelschnittes, der in einem gegebenen Punkte eine Berührung vierter Ordnung mit einer gegebenen Kurve besitzt.

17. Zu bestimmen: der Ort der Rückkehrpunkte der Kurven dritten Grades, die drei gegebene Gerade zu Asymptoten haben.

18. Wie schneiden sich die Fläche

$$y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2 - 2xyz = 0$$

und die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1?$$

19. Alle Schraubenlinien sind zu bestimmen, worin der Krümmungsradius dem von einem festen Punkte an gerechneten Bogen proportional ist.

20. Die Trajektorien der erzeugenden Geraden einer abwickelbaren Helicoide sind zu bestimmen.[2]

[1] Aus: Recueil complémentaire d'Exercices sur le Calcul infinitésimal, par M. Tisserand. Paris Gauthier-Villars.

[2] Dieselbe ist der geometrische Ort der an die Schraubenlinie (299.) gezogenen Tangenten. G.

Druck von Gressner & Schramm in Leipzig.

Fischers technologischer Verlag M. Krayn.

Berlin W. 9, Köthenerstrasse 46.

In neuer Ausgabe erschien:

Die

elementare Physik des Äthers

(Kraft und Masse)

von

Rudolf Mewes.

Zwei Teile: I. Teil eleg. brosch. Mk. 2.—. — II. Teil Mk. 4.—
Beide Teile zugleich bezogen Mk. 5.—, eleg. geb. Mk. 6.50.

Bestimmung der

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schwerkraftstrahlen

und deren Wirkungsgesetze

von

Rudolf Mewes, Physiker und Ingenieur.

Preis brosch. Mk. 2.—.

HUYGHENS, Abhandlung über die Ursache der Schwere.
Deutsch von ***Rudolf Mewes.*** 1,50 Mk. ord.

CLAPEYRON, Über die bewegende Kraft der Wärme.
Deutsch von ***Rudolf Mewes.*** 1,50 Mk. ord.

Licht-, Elektrizitäts- und X-Strahlen.

Ein Beitrag zur Erklärung der Röntgenschen Strahlen

von

Rudolf Mewes,

Ingenieur und Physiker.

2. Auflage. — Preis eleg. brosch. Mk. 1,50.

Diese erste wissenschaftliche Veröffentlichung über das Wesen der Röntgenschen X-Strahlen hat in der gesamten wissenschaftlichen Welt allgemeines Interesse erregt, so dass sofort eine 2. Auflage notwendig wurde.

So schreibt z. B. The Chemical Trade Journal: Das Buch ist **der wertvollste wissenschaftliche Beitrag** zur Erklärung der Röntgenschen Strahlen.

Henri Moissan.

Der elektrische Ofen.

Autorisierte deutsche Ausgabe.

Übersetzt von

Dr. Theodor Zettel.

Die Ergebnisse der Untersuchungen von Professor Moissan, die er in diesem Werke zum ersten Male zusammenfassend und durch zahlreiche neue Versuche und Resultate vermehrt, niederlegt, gehören **zu den bedeutendsten, welche die Wissenschaft in der letzten Zeit hervorgebracht hat.** Das Werk wird für **jeden Chemiker, Physiker, Elektrochemiker, Metallurgen,** sowie für die gesamte wissenschaftliche und technische Welt umsomehr von höchstem Interesse sein, als in demselben auch eingehende Angaben für die praktische und technische Ausführung der Untersuchungen Moissans enthalten sind. Ausführlicher Prospekt gratis.

Das Werk umfasst 23 Bogen gross Oktav.

Eleg. brosch.: Preis Mk. 15,—. — Eleg geb.: Preis Mk. 17,—.

Bestellungen nimmt jede Buchhandlung und der Verlag entgegen.

Fischers technologischer Verlag M. Krayn.
Berlin W. 9, Köthenerstrasse 46.

Lehrbuch der Analysis

von

Ch. Sturm

übersetzt nach der 8. Auflage des **Cours d'analyse**

von

Dr. Theodor Gross,

Privatdozent a. d. techn. Hochschule zu Charlottenburg.

Zweiter Band.

Preis brosch. 7,50 Mk., eleg geb. 9 Mk.

Seit 1893 erscheint die:

Elektrochemische Zeitschrift

Organ für das Gesamtgebiet
der
Elektrochemie, Elektrometallurgie, Galvanoplastik, Galvanostegie, für den Batterien- und Akkumulatorenbau.

Die fortschreitende Entwickelung **der Elektrochemie**, hatte das dringende Bedürfnis nach einem **speziellen elektrochemischen Organ** hervorgerufen. Die einzelnen Veröffentlichungen befanden sich zerstreut in den verschiedensten elektrotechnischen, chemischen, physikalischen und gewerblichen Zeitschriften, sodass es für den Gelehrten, wie insbesondere für den Praktiker immer mit grossen Schwierigkeiten verknüpft gewesen ist, das ihn Interessierende herauszufinden.

Mit der nun ihren IV. Jahrgang beginnenden „Elektrochemischen Zeitschrift" ist sowohl in **wissenschaftlicher**, als ganz besonders aber in **praktischer** Hinsicht ein **Sammelpunkt für alle Veröffentlichungen auf dem Gebiete der**
Elektrochemie. Elektrometallurgie, Galvanoplastik, Galvanostegie, dem Batterien- und Akkumulatorenbau
geschaffen worden.

Probenummern gratis durch die Verlagsbuchhandlung.

Der Abonnementspreis beträgt für den Jahrgang **16,— Mk.** (pro Quartal **4,– Mk.**) für das Ausland **18,40 Mk.**

Bestellungen nehmen alle Buchhandlungen und die Verlagsbuchhandlung an.

Wer sich umfangreiche Kenntnisse auf allen Gebieten der Technik aneignen und über alle technischen Errungenschaften der Neuzeit stets unterrichtet sein will, der abonniere auf:

„Die Technik"

Organ für gemeinverständliche Darstellung sämmtlicher Fortschritte der Technik.

Rundschau

über die
technischen und industriellen Errungenschaften auf allen Gebieten: **Chemie, Physik, Elektrotechnik, Maschinenkunde, Hoch- und Tiefbau, Berg- und Hüttenwesen, Photographie, Schiffsbau, Genie- und Bewaffnungswesen u. s. w.**

Herausgegeben von

Dr. A. Neubürger.

Preis pro Quartal 2 Mk.

Alle 14 Tage ein reich ausgestattetes, mit Illustrationen versehenes Heft.
Abonnements durch alle Buchhandlungen und Postanstalten, sowie durch:
Fischers technologischer Verlag M. Krayn Berlin W. 9,
der Probenummern gratis versendet.

Sturm, Chr. Fr.

Lehrbuch der Analysis (Cours d Analyse) von Chr. Fr. Sturm Übersetzt von
Dr. Theodor Gross

Bd.: 1

Berlin 1897

4 Math.p. 353 ri-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb00076030-5

Die PDF-Datei kann elektronisch durchsucht werden.